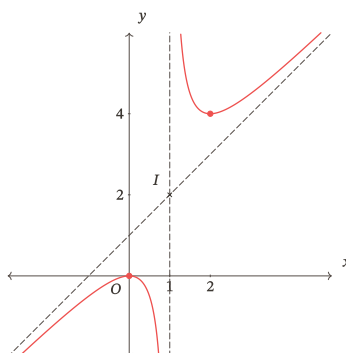


Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Luyện tập

Các nhiệm vụ luyện tập, không kèm lời giải.



Mở trang Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

R1-G04

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học và chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học và hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	3
Luyện tập	4
Chặng 1 — Bậc ba và phân thức bậc nhất	4
Điểm dừng 02 — Đối chiếu chặng đầu	5
Chặng 2 — Tiệm cận xiên và điều kiện của mô hình	5
Điểm dừng 03 — Đối chiếu khảo sát và diễn giải	6
Nguồn	7

Bắt đầu

Một bảng biến thiên đúng chưa bảo đảm hình vẽ đã đúng. Nếu quên một điểm bị loại, đặt sai giao điểm hoặc nối hai nhánh qua tiệm cận đứng, em có thể vẽ một đồ thị trái với chính phép tính của mình. Học liệu này giúp em tổ chức kết quả khảo sát và dùng các biểu diễn để kiểm tra lẫn nhau.

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Tổ chức bản khảo sát	Lập bản khảo sát có đủ tập xác định, đạo hàm, biến thiên, cực trị, giới hạn và tiệm cận khi có; nhận ra thông tin còn thiếu.
Khảo sát hàm số bậc ba	Vẽ đồ thị hàm số bậc ba; đọc dấu đạo hàm, cực trị và hai đầu đồ thị; phân biệt có cực trị với có điểm đạo hàm bằng 0 nhưng không có cực trị.
Khảo sát phân thức bậc nhất trên bậc nhất	Giữ đúng hai khoảng xác định, tìm tiệm cận và hướng của từng nhánh.
Khảo sát phân thức bậc hai trên bậc nhất	Giữ đúng khoảng xác định và hướng nhánh; nối phép chia, tiệm cận xiên và biến thiên.
Nhận biết đối xứng	Nhận biết tâm đối xứng; với hai họ phân thức đang xét, nhận biết các trục đối xứng theo hai đường phân giác của các tiệm cận.
Kiểm các biểu diễn và diễn giải mô hình	Kiểm sự phù hợp giữa công thức, bảng biến thiên và đồ thị; giải thích kết quả trong điều kiện của biến và đơn vị của mô hình.

Ba họ hàm của phần khảo sát đầy đủ là

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0;$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0;$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0,$$

với đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu ở họ cuối. Điều kiện của từng mẫu số vẫn phải được xét.

Nguồn đối chiếu: Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, phần lớp 12, trang 106.

Tiên quyết

Em cần biết tìm tập xác định, tính đạo hàm, xét dấu, xác định cực trị từ dấu đạo hàm, đọc giới hạn và tìm tiệm cận trong trường hợp đơn giản. Các kiến thức đã học trong “Đơn điệu và cực trị”, “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”, “Đường tiệm cận” được nối lại ở đây; không cần làm lại toàn bộ những học liệu ấy nếu đã có nền phù hợp.

Khởi động (mở trên trang học liệu) giúp tự kiểm một số thao tác thiết yếu. Thiếu phần nào thì mở đúng thể **Ôn nền** (mở trên trang học liệu), không coi làm đúng Khởi động là đã đạt cả học liệu.

Cách học và chọn nơi bắt đầu

Chuẩn bị giấy để lưu bài tự làm, bảng và hình. Đọc Gợi mở rồi thử trả lời trước phần giải thích. Khi vẽ, ghi dữ kiện đã tính trước, sau đó mới nối bằng điệu đường cong. Sau mỗi mục, tự làm nhiệm vụ cuối mỗi mục.

- Cần học hoặc nhớ lại: mở **Bài học** (mở trên trang học liệu).
- Đã nắm phần học, muốn tự thực hiện: mở Luyện tập (trang 4).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào thẳng **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu), kể cả chưa làm những phần trước.
- Đến ngày hẹn: mở đúng lượt **Ôn lại** (mở trên trang học liệu).

Bản đồ học và hỗ trợ

Bài học (mở trên trang học liệu) → **Luyện tập** (trang 4) → **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) → **Ôn lại** (mở trên trang học liệu)

Đây là tiến trình khuyến nghị và thứ tự tra đọc, không phải điều kiện bắt buộc hoàn tất tuần tự. Phần bỏ qua không tự được coi là đã đạt.

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Quên cách tổ chức bản khảo sát	Sơ đồ khảo sát (mở trên trang học liệu)	Trở lại nhiệm vụ đang làm
Vướng cách xử lí một họ hàm	Bậc ba (mở trên trang học liệu), phân thức bậc nhất (mở trên trang học liệu), phân thức bậc hai (mở trên trang học liệu)	Sửa đúng bước còn vướng
Thiếu thao tác nền	Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu nền phù hợp rồi trở về bài gốc
Đã tự làm và muốn đổi chiều	Lời giải (mở trên trang học liệu), Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) khi cần	Giữ kết quả gốc, xác nhận riêng phần sau hỗ trợ
Cần lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi dữ kiện đã có; không bắt ghi sau từng câu

Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi. Riêng **một lượt Kiểm tra không chia thành nhiều đợt** và phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần trợ giúp, kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước; phần làm sau trợ giúp không tính ngược vào kết quả độc lập.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Dùng **bảng đối chiếu sau Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) để xem từng mục tiêu. Hoàn tất lượt chính khi có bài làm tự lực phù hợp, những lỗi thiết yếu đã được kiểm lại và các giới hạn còn lại được ghi rõ. Kết quả đúng ở một mục tiêu không thay bằng chứng của mục tiêu còn sai.

Sau khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn ôn sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày, 3–4 tuần. Có thể học tiếp nội dung đủ tiên quyết trong khi chờ ôn. Nếu chưa có câu phù hợp chưa gặp trước đó để xác nhận, ghi “chưa đủ bằng chứng”; không tự coi bài đã đọc lời giải là bài mới.

Luyện tập

Tự làm trước khi mở lời giải; giữ riêng bài làm ban đầu và kết quả sau hỗ trợ. Chọn chặng theo việc còn cần luyện; phần chưa làm chưa có bằng chứng.

Chặng	Trọng tâm luyện tập	Nhiệm vụ và Điểm dừng
Bậc ba và phân thức bậc nhất (trang 4)	Khảo sát bậc ba và phân thức bậc nhất; kiểm dấu và hình vẽ	Nhiệm vụ 10 (trang 4)–12 (trang 4); Điểm dừng 02 (trang 5)
Phân thức bậc hai và mô hình (trang 5)	Ghép tiệm cận xiên với biến thiên, diễn giải đúng tập đang xét	Nhiệm vụ 13 (trang 5)–15 (trang 6); Điểm dừng 03 (trang 6)

Có thể chia Luyện tập thành nhiều buổi. Ghi rõ mức hỗ trợ với câu đã xem lời giải; không tính việc nhớ lại đáp án là bằng chứng mới. Khi vướng, dùng đường hỗ trợ phù hợp ở Điểm dừng rồi trở lại bài đang làm.

Chặng 1 – Bậc ba và phân thức bậc nhất

Mục tiêu: tự tổ chức bản khảo sát, kiểm cực trị qua dấu và vẽ đúng nhánh. Làm các nhiệm vụ dưới đây theo nhu cầu đã xác định; phần chưa làm chưa có bằng chứng.

Nhiệm vụ 10 – Khảo sát một hàm bậc ba

Khảo sát và vẽ đồ thị $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Ghi đủ tập xác định, đạo hàm/dấu, cực trị, giới hạn, bảng biến thiên, giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng. Kiểm việc đường cong đi qua hay chạm trục hoành tại các giao điểm.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\).](#)

Nhiệm vụ 11 – Không có cực trị theo hai cách

So sánh $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ với $q(x) = x^3 + 3x$. Tìm dấu đạo hàm và cực trị của mỗi hàm. Với p , tính tâm đối xứng và giải thích ý nghĩa của điểm có đạo hàm bằng 0. Không yêu cầu khảo sát đầy đủ hai đồ thị.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\).](#)

Nhiệm vụ 12 – Khảo sát phân thức với hai nhánh tăng

Khảo sát và vẽ đồ thị $f(x) = \frac{3x-8}{x-2}$. Nêu tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, các giới hạn, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ, tâm và các trục đối xứng.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\).](#)

Điểm dừng 02 – Đối chiếu chặng đầu

Việc cần xác nhận	Bài làm cần đối chiếu	Nếu chưa đúng
Tập xác định, dấu đạo hàm, cực trị, giới hạn, bảng và hình bậc ba khớp nhau	Nhiệm vụ 10 (trang 4)	Xem sơ đồ (mở trên trang học liệu), bậc ba (mở trên trang học liệu); Nhiệm vụ 23 của Sửa lỗi, ý b (mở trên trang học liệu)
Phân biệt điểm đạo hàm bằng 0 với điểm cực trị bằng dấu hai phía	Nhiệm vụ 11 (trang 4)	Xem bậc ba không có cực trị (mở trên trang học liệu); Nhiệm vụ 23 của Sửa lỗi, ý a (mở trên trang học liệu)
Giữ hai khoảng xác định; giới hạn, tiệm cận và hướng hai nhánh phân thức bậc nhất khớp nhau	Nhiệm vụ 12 (trang 4)	Xem phân thức bậc nhất (mở trên trang học liệu); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý a (mở trên trang học liệu)

Chỉ dùng ý sửa chưa gặp trước đó và đúng lỗi. Nếu đúng, giải thích được và hình khớp dữ kiện, ghi bằng chứng rồi chọn chặng tiếp hoặc hoạt động phù hợp. Nếu sai thao tác, mở **Ôn nền** (mở trên trang học liệu); nếu hết câu mới, **ghi phần chưa xác nhận** (mở trên trang học liệu). Sau hỗ trợ trở về Điểm dừng này; không phải làm lại mọi câu của chặng.

Chặng 2 – Tiệm cận xiên và điều kiện của mô hình

Mục tiêu: phân biệt hai trường hợp có cực trị và không có cực trị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất; giải thích kết quả của mô hình theo đúng điều kiện mà biến số được phép nhận.

Nhiệm vụ 13 – Khảo sát phân thức có tiệm cận xiên

Khảo sát và vẽ đồ thị $h(x) = \frac{x^2+2x+4}{x}$. Giải thích vì sao có thể có giá trị cực đại nhỏ hơn giá trị cực tiểu. Xác định tâm và mô tả hai trục đối xứng, không bắt buộc tìm phương trình các đường phân giác.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 14 – Dấu trừ làm thay đổi hai nhánh

Khảo sát và vẽ đồ thị $v(x) = \frac{x^2-x-3}{x+1}$. Kiểm lại dấu đạo hàm bằng cách viết dưới dạng thương và phần dư; xác định giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 15 – Đồ thị chỉ trên khoảng sản lượng được phép

Một mô hình chi phí trung bình cho $A(x) = 3 + \frac{24}{x}$ triệu đồng mỗi tấn, với khối lượng $x \in [2; 8]$ tấn. Lập bảng biến thiên và vẽ phần đồ thị ứng với $x \in [2; 8]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và khối lượng để đạt từng giá trị ấy. Nhận xét câu “đường $y = 3$ là tiệm cận ngang nên chi phí nhỏ nhất bằng 3”.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Điểm dừng 03 – Đối chiếu khảo sát và diễn giải

Việc cần xác nhận	Bài làm cần đối chiếu	Nếu chưa đúng
Tiệm cận xiên, hai cực trị, giới hạn, bảng và hình khớp nhau	Nhiệm vụ 13 (trang 5)	Ví dụ có hai cực trị (mở trên trang học liệu); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý b (mở trên trang học liệu)
Giải thích không có cực trị bằng dấu đạo hàm; bảng và hình thể hiện đúng từng khoảng	Nhiệm vụ 14 (trang 5)	Ví dụ không cực trị (mở trên trang học liệu); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý c (mở trên trang học liệu)
Đọc giá trị được đạt trên đoạn đang xét, có đơn vị	Nhiệm vụ 15 (trang 6)	Điều kiện của mô hình (mở trên trang học liệu); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý d (mở trên trang học liệu)

Nếu hình vẽ của trường hợp không có cực trị còn sai, dùng ý c chưa gặp trước đó và kiểm tra cả hình vẽ, không chỉ phép tính đạo hàm. Em có thể bắt đầu Kiểm tra khi đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin, hoặc quay lại đúng mục học nếu cần. Khi đánh giá kết quả, không dùng số câu đúng ở những phần khác để bỏ qua một nội dung còn vướng.

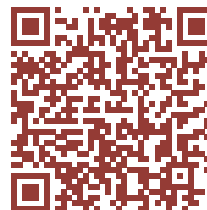
Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*, ban hành kèm Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT. Phần lớp 12, trang 106–107.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một*, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống. Bài 4, trang 26–32: sơ đồ khảo sát, hàm bậc ba, hai họ phân thức và tính đối xứng.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học