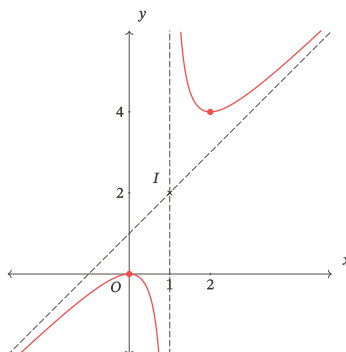


Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Lời giải và hướng dẫn chấm

Lời giải, đáp án và hướng dẫn chấm.



Mở trang Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

R1-G04

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học và chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học và hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	3
Lời giải	4
Bài học	4
Luyện tập	8
Kiểm tra	14
Ôn lại	17
Sửa lỗi	20
Nguồn	36

Bắt đầu

Một bảng biến thiên đúng chưa bảo đảm hình vẽ đã đúng. Nếu quên một điểm bị loại, đặt sai giao điểm hoặc nối hai nhánh qua tiệm cận đứng, em có thể vẽ một đồ thị trái với chính phép tính của mình. Học liệu này giúp em tổ chức kết quả khảo sát và dùng các biểu diễn để kiểm tra lẫn nhau.

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Tổ chức bản khảo sát	Lập bản khảo sát có đủ tập xác định, đạo hàm, biến thiên, cực trị, giới hạn và tiệm cận khi có; nhận ra thông tin còn thiếu.
Khảo sát hàm số bậc ba	Vẽ đồ thị hàm số bậc ba; đọc dấu đạo hàm, cực trị và hai đầu đồ thị; phân biệt có cực trị với có điểm đạo hàm bằng 0 nhưng không có cực trị.
Khảo sát phân thức bậc nhất trên bậc nhất	Giữ đúng hai khoảng xác định, tìm tiệm cận và hướng của từng nhánh.
Khảo sát phân thức bậc hai trên bậc nhất	Giữ đúng khoảng xác định và hướng nhánh; nối phép chia, tiệm cận xiên và biến thiên.
Nhận biết đối xứng	Nhận biết tâm đối xứng; với hai họ phân thức đang xét, nhận biết các trục đối xứng theo hai đường phân giác của các tiệm cận.
Kiểm các biểu diễn và diễn giải mô hình	Kiểm sự phù hợp giữa công thức, bảng biến thiên và đồ thị; giải thích kết quả trong điều kiện của biến và đơn vị của mô hình.

Ba họ hàm của phần khảo sát đầy đủ là

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0;$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0;$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0,$$

với đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu ở họ cuối. Điều kiện của từng mẫu số vẫn phải được xét.

Nguồn đối chiếu: Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, phần lớp 12, trang 106.

Tiên quyết

Em cần biết tìm tập xác định, tính đạo hàm, xét dấu, xác định cực trị từ dấu đạo hàm, đọc giới hạn và tìm tiệm cận trong trường hợp đơn giản. Các kiến thức đã học trong “Đơn điệu và cực trị”, “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”, “Đường tiệm cận” được nối lại ở đây; không cần làm lại toàn bộ những học liệu ấy nếu đã có nền phù hợp.

Khởi động (mở trên trang học liệu) giúp tự kiểm một số thao tác thiết yếu. Thiếu phần nào thì mở đúng thẻ **Ôn nền** (mở trên trang học liệu), không coi làm đúng Khởi động là đã đạt cả học liệu.

Cách học và chọn nơi bắt đầu

Chuẩn bị giấy để lưu bài tự làm, bảng và hình. Đọc Gợi mở rồi thử trả lời trước phần giải thích. Khi vẽ, ghi dữ kiện đã tính trước, sau đó mới nối dáng điệu đường cong. Sau mỗi mục, tự làm nhiệm vụ cuối mỗi mục.

- Cần học hoặc nhớ lại: mở **Bài học** (mở trên trang học liệu).
- Đã nắm phần học, muốn tự thực hiện: mở **Luyện tập** (mở trên trang học liệu).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào thẳng **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu), kể cả chưa làm những phần trước.
- Đến ngày hẹn: mở đúng lượt **Ôn lại** (mở trên trang học liệu).

Bản đồ học và hỗ trợ

Bài học (mở trên trang học liệu) → **Luyện tập** (mở trên trang học liệu) → **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) → **Ôn lại** (mở trên trang học liệu)

Đây là tiến trình khuyến nghị và thứ tự tra đọc, không phải điều kiện bắt buộc hoàn tất tuần tự. Phần bỏ qua không tự được coi là đã đạt.

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Quên cách tổ chức bản khảo sát	Sơ đồ khảo sát (mở trên trang học liệu)	Trở lại nhiệm vụ đang làm
Vướng cách xử lí một họ hàm	Bậc ba (mở trên trang học liệu), phân thức bậc nhất (mở trên trang học liệu), phân thức bậc hai (mở trên trang học liệu)	Sửa đúng bước còn vướng
Thiếu thao tác nền	Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu nền phù hợp rồi trở về bài gốc
Đã tự làm và muốn đổi chiều	Lời giải (trang 4), Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) khi cần	Giữ kết quả gốc, xác nhận riêng phần sau hỗ trợ
Cần lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi dữ kiện đã có; không bắt ghi sau từng câu

Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi. Riêng **một lượt Kiểm tra không chia thành nhiều đợt** và phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần trợ giúp, kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước; phần làm sau trợ giúp không tính ngược vào kết quả độc lập.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Dùng **bảng đối chiếu sau Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) để xem từng mục tiêu. Hoàn tất lượt chính khi có bài làm tự lực phù hợp, những lỗi thiết yếu đã được kiểm lại và các giới hạn còn lại được ghi rõ. Kết quả đúng ở một mục tiêu không thay bằng chứng của mục tiêu còn sai.

Sau khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn ôn sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày, 3–4 tuần. Có thể học tiếp nội dung đủ tiên quyết trong khi chờ ôn. Nếu chưa có câu phù hợp chưa gặp trước đó để xác nhận, ghi “chưa đủ bằng chứng”; không tự coi bài đã đọc lời giải là bài mới.

Lời giải

Mở sau khi đã tự làm. Mỗi lời giải có đường trở về đúng đề; phần quyết định tiếp tục nằm ở Điểm dừng tương ứng. Chỉ mở lời giải của nhiệm vụ cần đối chiếu; giữ lại bài tự làm để nhận ra bước đúng và bước cần sửa.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 – Tập xác định trước và sau rút gọn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Trên tập xác định ấy, $r(x) = x + 3$. Điểm $(3; 6)$ không thuộc đồ thị vì công thức ban đầu không xác định tại 3. Tiêu chí: giữ điều kiện trong cả phép biến đổi và hình; không coi rút gọn là quyền mở rộng tập xác định.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 02 – Đạo hàm và dấu

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$p'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$. Dấu lần lượt là $+$, $-$, $+$ trên $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$. Cực đại tại $x = -2$, cực tiểu tại $x = 2$. Trước kết luận, kiểm tra giá trị đang xét có thuộc tập xác định hay không và đạo hàm đổi dấu qua điểm ấy. Nếu chỉ tìm được hai nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 mà chưa xét dấu, kết luận chưa đủ căn cứ.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 03 – Giới hạn có hướng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Khi $x \rightarrow -2^-$, mẫu âm và tiến tới 0, nên $q(x) \rightarrow -\infty$. Khi $x \rightarrow -2^+$, mẫu dương và tiến tới 0, nên $q(x) \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 1.$$

Hai đường tiệm cận là $x = -2$, $y = 1$. Tiêu chí: đủ bốn hướng, phân biệt phương trình đường thẳng với giá trị giới hạn.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 04 – Thương và phần dư**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Với $x \neq -1$,

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} = x + 1 + \frac{4}{x + 1},$$

vì $(x + 1)(x + 1) + 4 = x^2 + 2x + 5$. Bài làm cần có phần dư 4, giữ mẫu số và điều kiện xác định. Khi lấy mẫu nhân với thương rồi cộng phần dư, kết quả phải đúng bằng tử số ban đầu.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ trong Bài học**Nhiệm vụ 05 – Tìm mâu thuẫn trước khi nổi nét****Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

$h(0) = -1$, nên đồ thị đi qua $(0; -1)$, không qua O . Các kết quả về tập xác định, đạo hàm và đồng biến đã đúng.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Hàm không có cực trị vì đạo hàm dương trên $\mathbb{R}$. Tiêu chí: chỉ sửa phần sai, giữ phần đúng và nêu lí do không có cực trị.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 06 – Một điểm dừng không đổi chiều**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

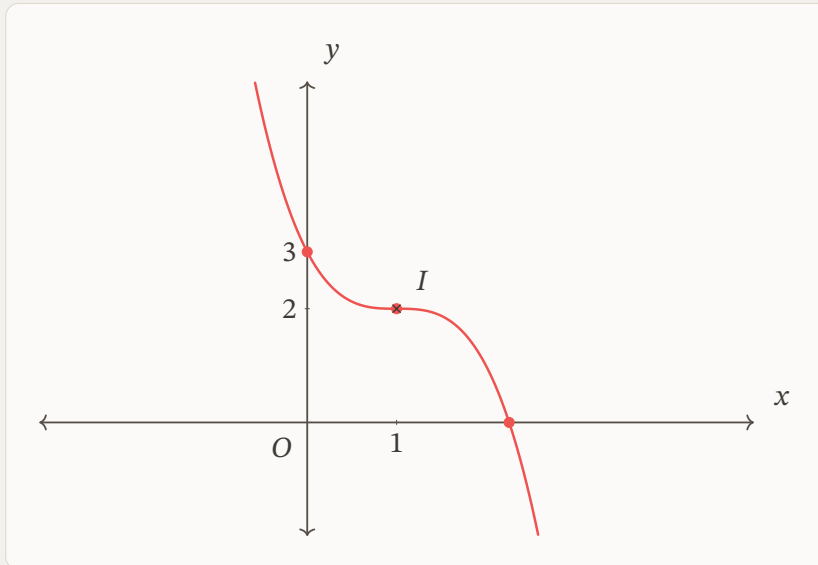
Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = -3(x - 1)^2$. Đạo hàm âm hai phía của 1, bằng 0 tại 1; hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$p'(x)$		–	0	–	
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(1; 2)$; các điểm kiểm $(0; 3)$, $(2; 1)$. Không có tiệm cận. Hình tiếp tục đi xuống qua tâm, không quay đầu.



Hình 1

Đúng bảng và điểm chưa đủ nếu hình lại quay đầu tại $x = 1$; phải kiểm cả chiều đường cong.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 07 – Hai nhánh đồng biến

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $g'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$. Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$, không có cực trị.

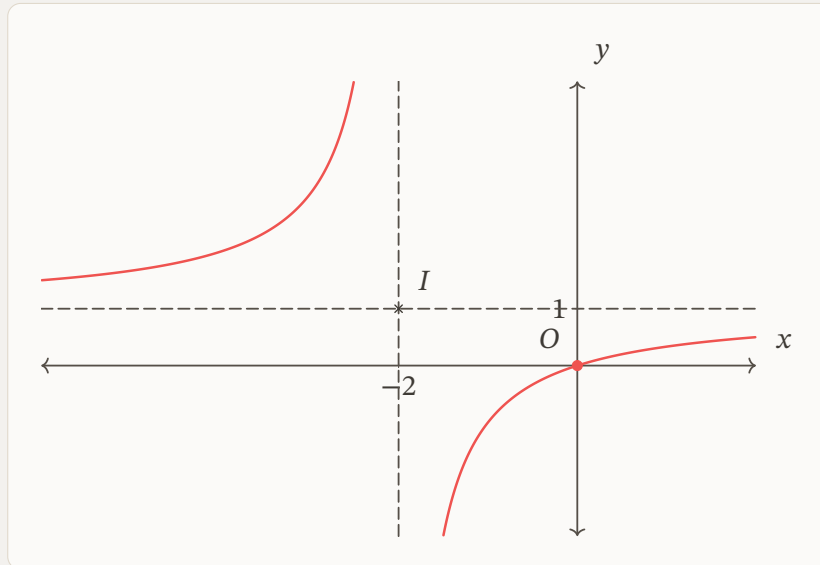
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	1	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	1

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = 1$, tâm $I(-2; 1)$. Giao cả hai trục tại O . Hai đường phân giác $y-1 = \pm(x+2)$ là trục đối xứng. Không nối qua -2 vì điểm này không thuộc tập xác định; các giới hạn còn cho thấy hai nhánh đi về hai phía vô cực.



Hình 2

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 08 – Kiểm lại dấu của phần dư

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

$$h'(x) = 1 + \frac{4}{(x-2)^2} > 0.$$

Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$; không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty,$$

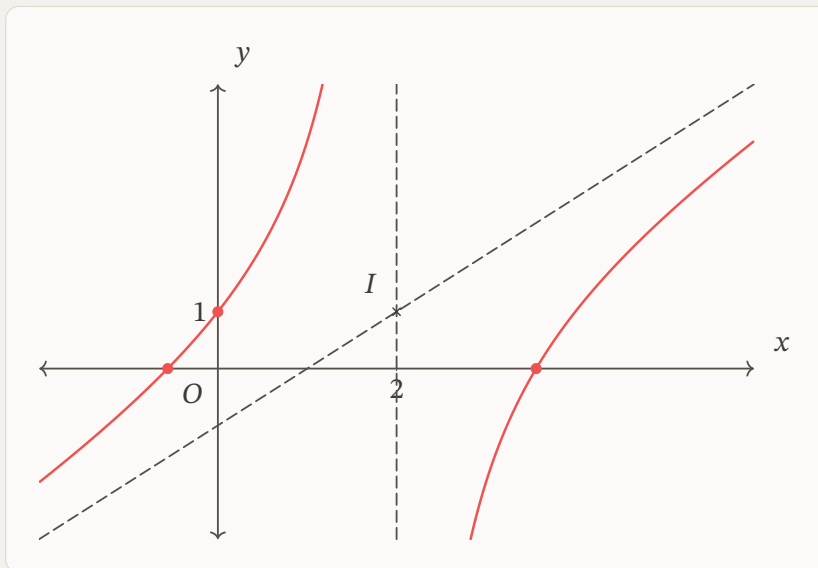
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x-1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x-1)] = 0.$$

Tiệm cận $x = 2$, $y = x - 1$; tâm $I(2; 1)$; $h(0) = 1$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Nhánh trái nằm trên đường xiên, nhánh phải nằm dưới. Tiêu chí: dấu cộng trong đạo hàm, đúng hướng ở điểm bị loại và hình đi qua $(0; 1)$.



Hình 3

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 09 – Chi phí trên hai tập đang xét

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$B'(x) = -\frac{18}{x^2} < 0$ trên tập đang xét $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất $B(2) = 13$, đơn vị triệu đồng mỗi tấn.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 4, \quad B(x) > 4.$$

Không có giá trị nhỏ nhất trên $[2; +\infty)$: với mỗi x , chọn khối lượng lớn hơn thì B nhỏ hơn. Trên $[2; 6]$, giá trị nhỏ nhất là $B(6) = 7$, đạt tại 6. Tiêu chí: hai tập đang xét cho hai kết luận khác nhau, không gọi 4 là giá trị nhỏ nhất.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Luyện tập

Nhiệm vụ 10 – Khảo sát một hàm bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

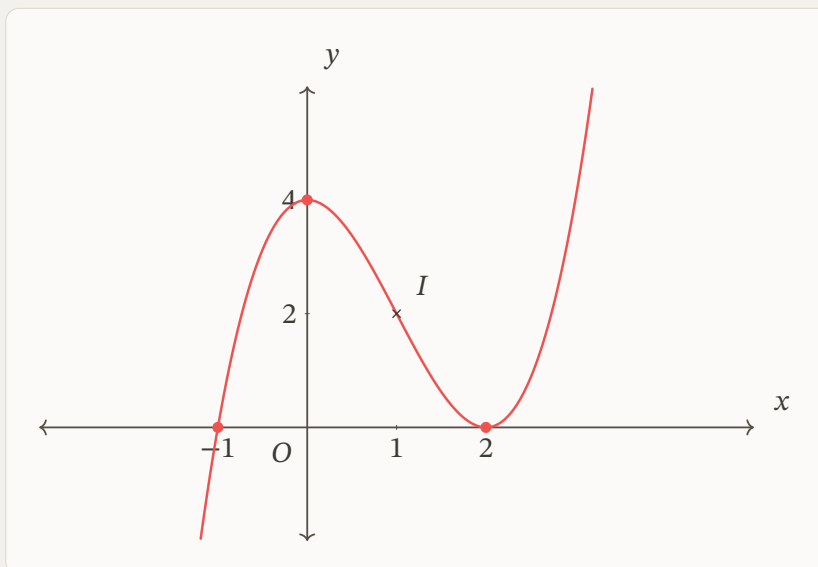
Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x(x - 2)$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$. Hàm đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại bằng 4; đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu bằng 0. Các điểm cực trị tương ứng của đồ thị là $(0; 4)$ và $(2; 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Dấu đạo hàm bằng 0 tại 0, 2; dấu trên các khoảng là dấu đã ghi ở trên. $f(x) = (x+1)(x-2)^2$, nên giao điểm với trục hoành tại $(-1; 0)$, $(2; 0)$; giao điểm với trục tung tại $(0; 4)$. Tâm $I(1; 2)$; không có tiệm cận. Đồ thị đi qua trục hoành tại -1 , chạm rồi đổi chiều tại 2.



Hình 4

Tiêu chí: không nhầm hai nghiệm của hàm với hai hoành độ cực trị; hình phải phù hợp cả bảng và giao điểm.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 11 – Không có cực trị theo hai cách

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$p'(x) = 3(x+1)^2$, dương hai phía -1 và bằng 0 tại -1 ; p đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị. Tâm của đồ thị p là $I(-1; -1)$. $q'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ trên $\mathbb{R}$, nên q cũng đồng biến, không có cực trị nhưng không có điểm đạo hàm bằng 0. Tiêu chí: nêu được sự khác nhau của hai đạo hàm và vì sao cả hai đều không có cực trị.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 12 – Khảo sát phân thức với hai nhánh tăng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

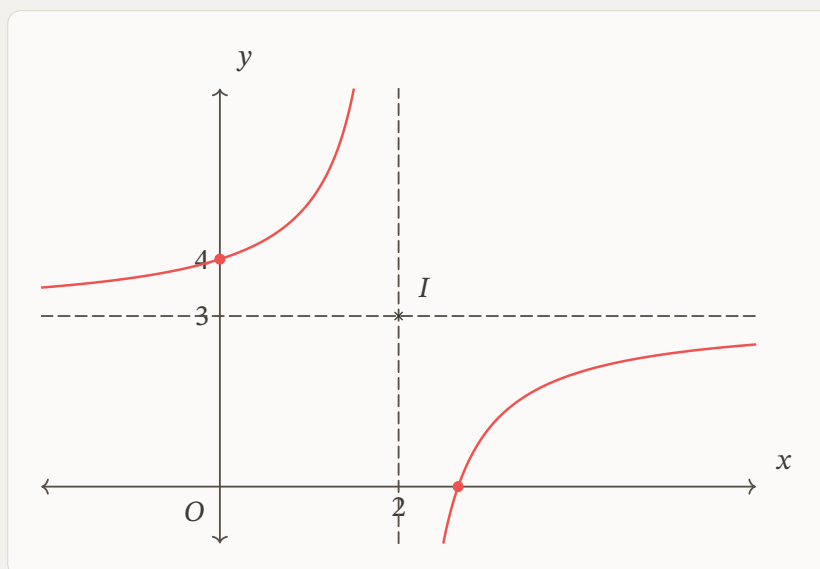
$f(x) = 3 - \frac{2}{x-2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} > 0$. Đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$; không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	3	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	3

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 2$, $y = 3$; tâm $I(2; 3)$; các trục đối xứng $y - 3 = \pm(x - 2)$. Đồ thị giao với trục hoành $\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, trục tung $(0; 4)$.



Hình 5

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 13 – Khảo sát phân thức có tiệm cận xiên

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$$h(x) = x + 2 + \frac{4}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

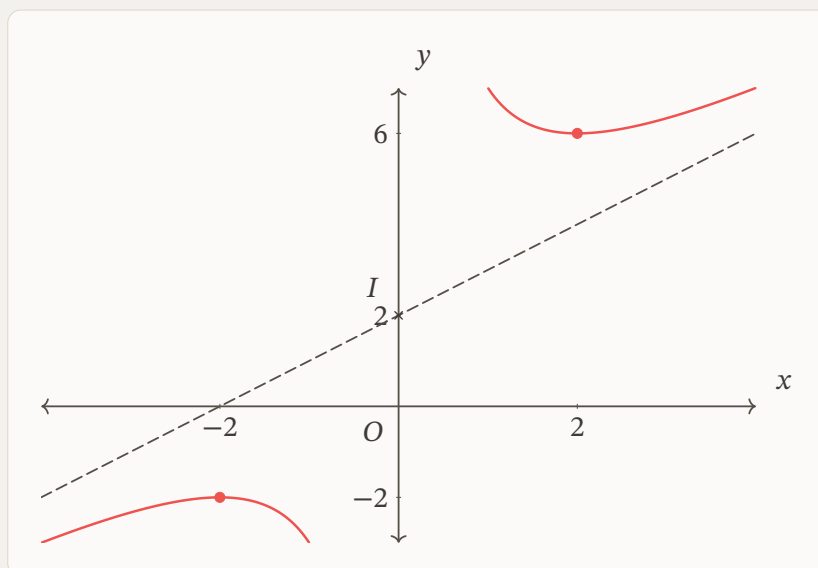
Đồng biến trên $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(-2; 0)$, $(0; 2)$. Cực đại tại -2 , giá trị -2 ; cực tiểu tại 2 , giá trị 6 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đạo hàm bằng 0 tại $-2, 2$. Tiệm cận $x = 0$, $y = x + 2$; tâm $I(0; 2)$. Từ $(x+1)^2 + 3 > 0$, nên không giao điểm với trục hoành; không có điểm trên trục tung vì 0 bị loại. Hai trục đối xứng là hai phân giác của hai tiệm cận.



Hình 6

Cực trị là so sánh trong lân cận; hai cực trị thuộc hai nhánh khác nhau. Không lấy quan hệ giữa hai giá trị ấy để bác bỏ kết quả.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 14 – Dấu trừ làm thay đổi hai nhánh

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

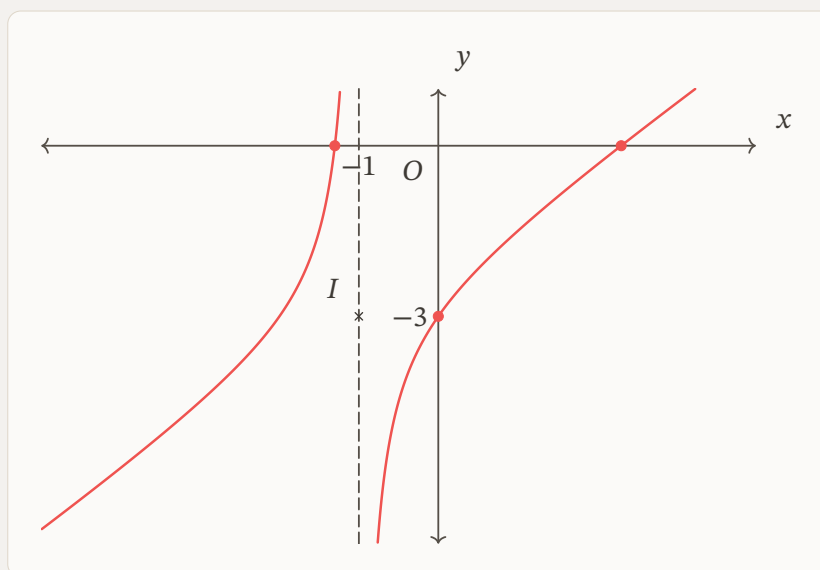
$v(x) = x - 2 - \frac{1}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $v'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Đồng biến trên từng khoảng xác định, không cực trị.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x - 2)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x - 2)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = x - 2$; tâm $I(-1; -3)$. Đồ thị giao với trục tung $(0; -3)$; giao điểm với trục hoành $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 0\right)$. Hai phân giác của tiệm cận là các trục đối xứng. Nhánh trái nằm trên đường xiên, nhánh phải nằm dưới.



Hình 7

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

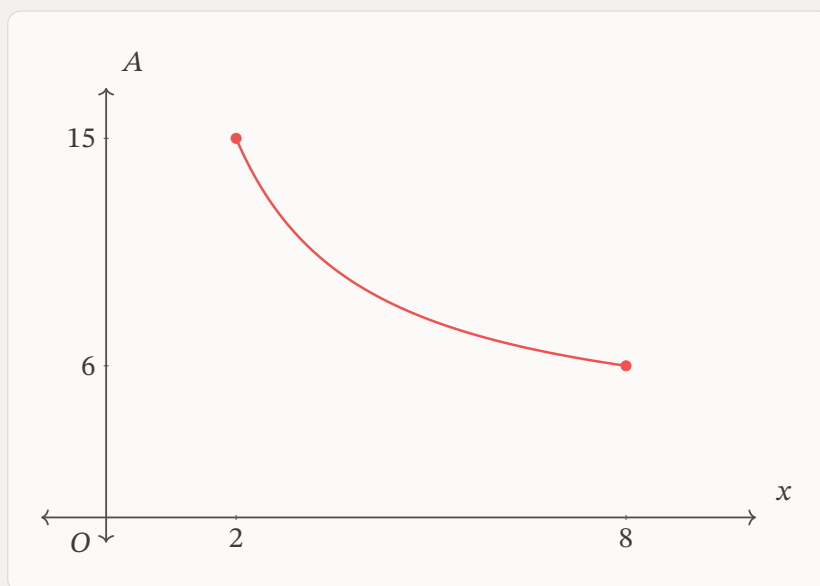
Nhiệm vụ 15 – Đồ thị chỉ trên khoảng sản lượng được phép**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

$$A'(x) = -\frac{24}{x^2} < 0 \text{ trên } [2; 8]; A(2) = 15, A(8) = 6.$$

x	2		8
$A(x)$	15	$\searrow$	6

Bảng biến thiên

Giá trị lớn nhất 15, đạt tại 2 tấn; nhỏ nhất 6, đạt tại 8 tấn. Đơn vị của giá trị là triệu đồng mỗi tấn.



Hình 8

Đề bài chỉ xét $x \in [2; 8]$, nên không xét $x \rightarrow +\infty$ cho đồ thị này. Đường tiệm cận ngang của hàm số mở rộng ngoài đoạn không xác định giá trị nhỏ nhất trên $[2; 8]$. Cần so sánh các giá trị trên chính đoạn đã cho và kiểm tra nơi đạt được.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Kiểm tra

Nhiệm vụ 16 – Khảo sát hàm bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

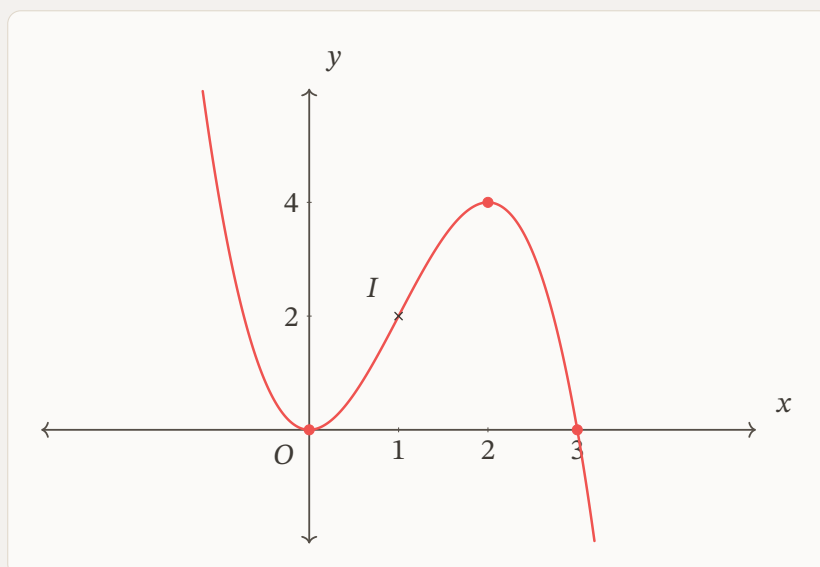
Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = -3x(x - 2)$. Dấu đạo hàm trên ba khoảng chia bởi 0, 2 lần lượt là $-$, $+$, $-$; bằng 0 tại hai mốc. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng 0; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; 0)$, hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại bằng 4; điểm cực đại của đồ thị là $(2; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Vì $f(x) = x^2(3 - x)$, giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, $(3; 0)$; giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Tâm $I(1; 2)$; không có tiệm cận. Đồ thị chạm trục hoành tại 0, đi qua tại 3.



Hình 9

Tiêu chí đối chiếu: đủ dữ kiện khảo sát, đúng chiều ở cả ba khoảng, đúng hai loại cực trị và đúng sự tiếp xúc/giao cắt. Hình không khớp bảng thì chưa xác nhận kỹ năng vẽ.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 17 – Khảo sát phân thức bậc nhất

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

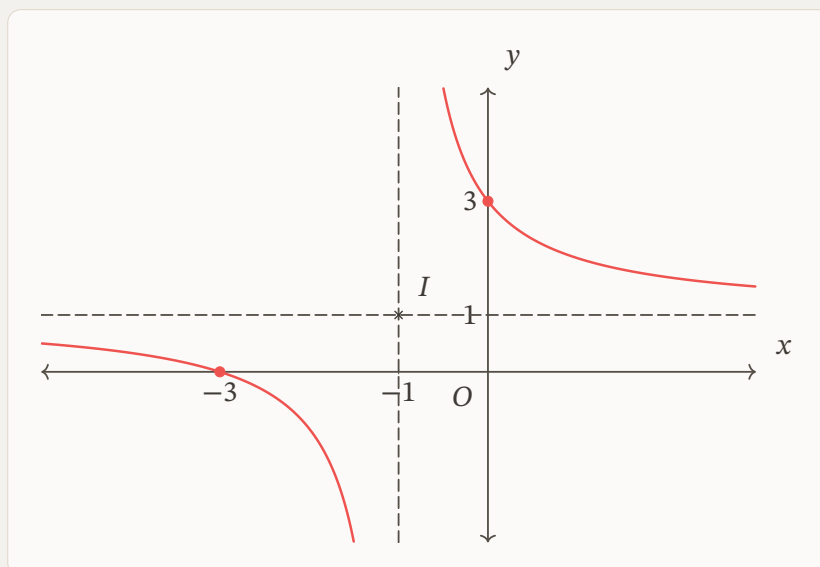
Ta có $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} < 0$. Hàm nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Biến thiên	1	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	1

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = 1$; tâm $I(-1; 1)$; giao điểm với các trục tọa độ tại $(-3; 0)$ và $(0; 3)$. Nhánh trái dưới tiệm cận ngang, nhánh phải trên tiệm cận ngang.



Hình 10

Tiêu chí: không ghép hai khoảng thành một khoảng nghịch biến, không vẽ nối qua điểm bị loại; giới hạn, giao điểm, tâm và hình thống nhất.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 18 – Khảo sát phân thức bậc hai

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ta có

$$h(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad h'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

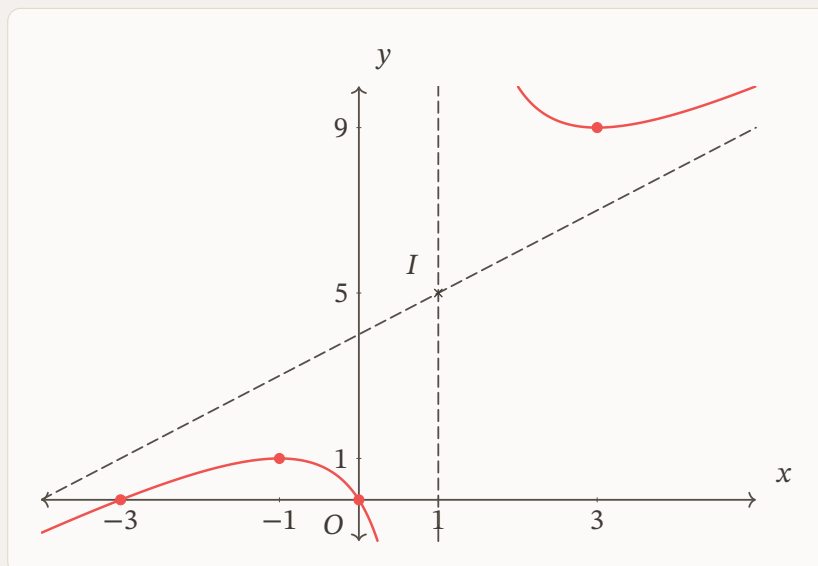
Đạo hàm bằng 0 tại $-1, 3$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại bằng 1; điểm cực đại của đồ thị là $(-1; 1)$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu bằng 9; điểm cực tiểu của đồ thị là $(3; 9)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x + 4)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x + 4)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		+		-		-		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x + 4$, tâm $I(1; 5)$. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận, không phải chính các tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(-3; 0)$, $(0; 0)$; giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên.



Hình 11

Tiêu chí: phép chia, dấu đạo hàm, bốn khoảng, giới hạn hai phía, hai tiệm cận và hình cùng đúng; hiểu tâm và trục đối xứng theo hai vai trò khác nhau.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 19 – Kết luận trong tập đang xét của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Điều kiện của mô hình $[3; 9]$. Vì $B'(x) = -\frac{18}{x^2} < 0$ trên $(3; 9)$, hàm giảm trên đoạn; $B(3) = 11$, $B(9) = 7$. Giá trị lớn nhất là 11 triệu đồng mỗi tấn tại 3 tấn, nhỏ nhất là 7 triệu đồng mỗi tấn tại 9 tấn.

Đường $y = 5$ gần với giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của công thức mở rộng, không phải giá trị nhỏ nhất trên đoạn đã cho. Đồ thị bị giới hạn ở đoạn không có nhánh tiến ra vô cực. Không kết luận cho 20 tấn từ mô hình chỉ được giả thiết áp dụng trên $[3; 9]$.

Bài làm cần dùng đúng điều kiện về sản lượng, xét hai đầu mút của đoạn, ghi đơn vị cho kết quả và không áp dụng công thức cho sản lượng nằm ngoài điều kiện đề bài.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Ôn lại

Nhiệm vụ 20 – Nhớ lại khảo sát bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

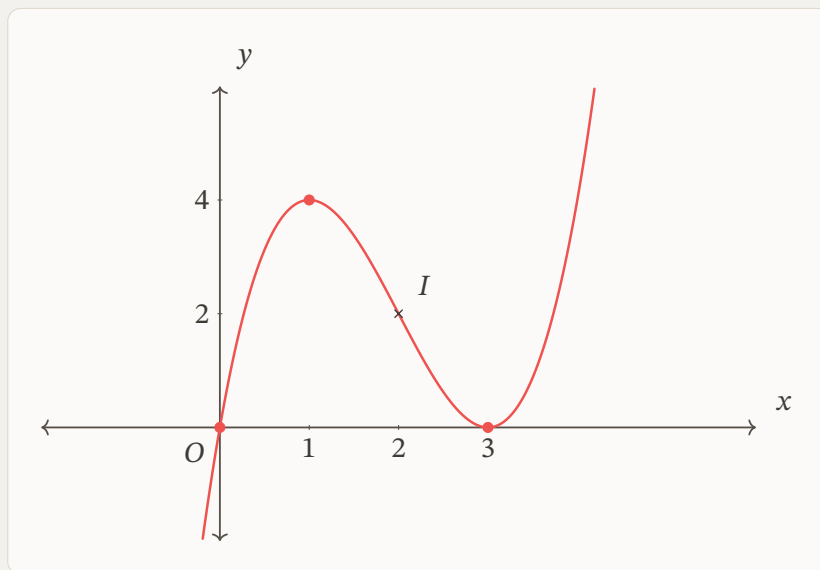
Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Dấu $+$, $-$, $+$ trên ba khoảng, bằng 0 tại 1, 3. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại bằng 4; điểm cực đại của đồ thị là $(1; 4)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu bằng 0; điểm cực tiểu của đồ thị là $(3; 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = x(x-3)^2$; giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, $(3; 0)$ và trục tung tại $(0; 0)$. Tâm $I(2; 2)$; không tiệm cận. Đồ thị đi qua trục hoành tại 0 và chạm tại 3.



Hình 12

Tiêu chí: tự khôi phục quy trình và hình đúng; đây là mẫu kiểm bậc ba, không thay kiểm hai họ phân thức.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 21 – Nhớ lại phân thức và điều kiện của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

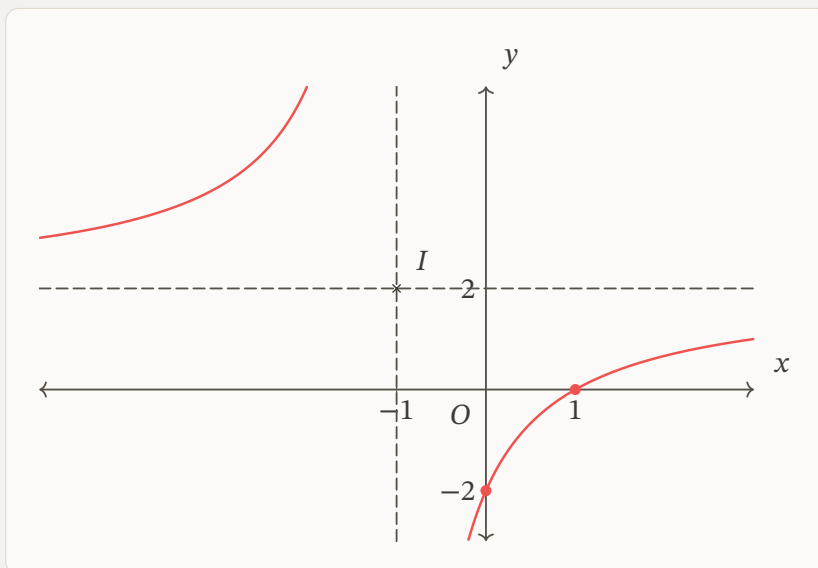
a) Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$, nên hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Biến thiên	2	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	2

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = 2$; tâm $I(-1; 2)$; giao điểm với các trục tọa độ tại $(1; 0)$, $(0; -2)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới tiệm cận ngang.



Hình 13

- b) $A'(x) = -\frac{30}{x^2} < 0$; hàm giảm trên $[3; 15]$. Giá trị lớn nhất $A(3) = 12$, nhỏ nhất $A(15) = 4$, đều tính bằng triệu đồng mỗi tấn. Cận 2 của công thức mở rộng không được đạt trên đoạn; đoạn kết thúc ở 15.

Đối chiếu và ghi kết quả từng ý. Làm được ý a về khảo sát phân thức chưa cho biết em đã tìm đúng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và giữ đúng điều kiện của mô hình ở ý b.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 22 – Nhớ lại tiệm cận xiên và cực trị

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. Đạo hàm bằng 0 tại $-1, 1$; hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-1; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu bằng 4; điểm cực tiểu của đồ thị là $(1; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty;$$

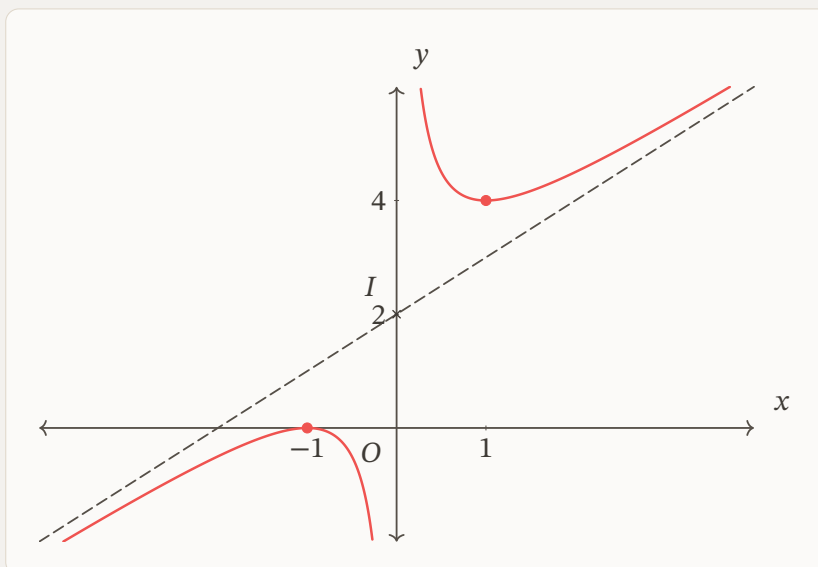
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x + 2)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x + 2)] = 0.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		+		-		-		+	
Biến thiên	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 0$, $y = x + 2$; tâm $I(0; 2)$. Trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận. Vì $h(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$, giao điểm với trục hoành tại $(-1; 0)$, không giao điểm với trục tung. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên.



Hình 14

Tiêu chí: không đặt giá trị hàm tại điểm loại, không gọi điểm ấy là cực trị; hình phải thể hiện đúng hai cực trị và hai nhánh.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Sửa lỗi

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 23 – Bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

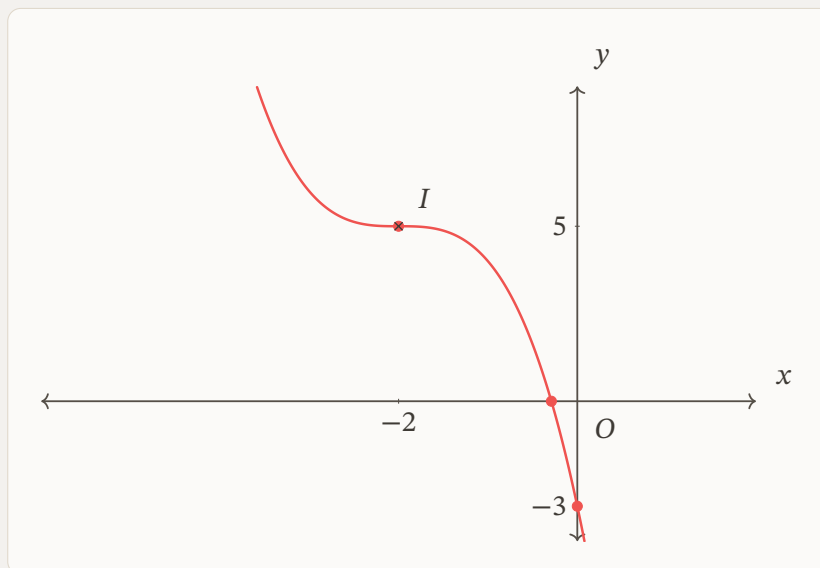
- a) Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = -3(x+2)^2$, dấu âm ở cả hai phía của -2 , bằng 0 chỉ tại mốc này. Hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(-2; 5)$; không tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(\sqrt[3]{5} - 2; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; -3)$. Hoành độ giao điểm với trục hoành được tìm từ phương trình $p(x) = 0$, không phải từ phương trình đạo hàm.



Hình 15

Với hàm so sánh, $q'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm đồng biến, không cực trị và không có nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0; đây là khả năng khác với p' có một nghiệm nhưng không đổi dấu. Muốn xác nhận đủ hai khả năng, phải giải thích cả phần so sánh này.

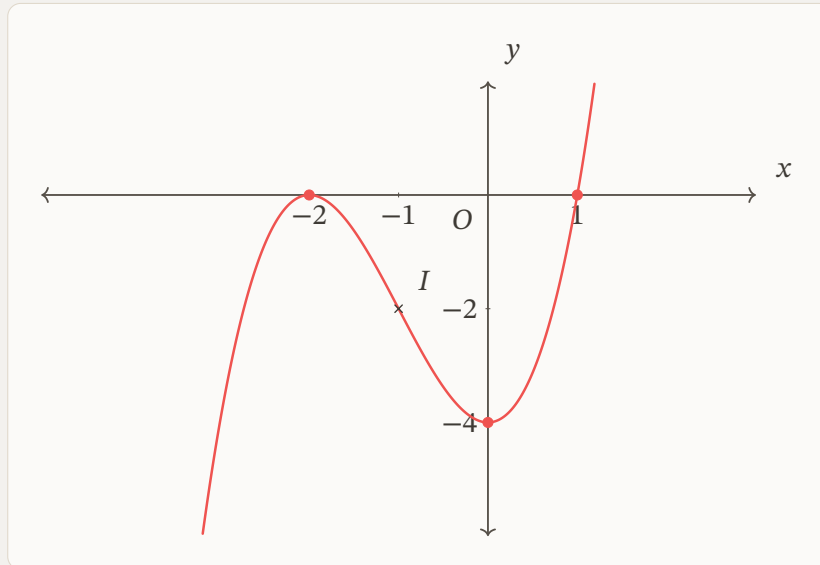
- b) Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x(x + 2)$; dấu +, −, + trên ba khoảng chia bởi −2, 0. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-2; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng −4; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; -4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = (x - 1)(x + 2)^2$; giao điểm với trục hoành tại $(-2; 0)$, $(1; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; -4)$. Tâm $I(-1; -2)$; không tiệm cận.



Hình 16

Tiêu chí ý b: toàn bộ chuỗi dữ kiện và hình thống nhất; làm được ý a không thay được ý b.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 24 – Phân thức và bài toán thực tế

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

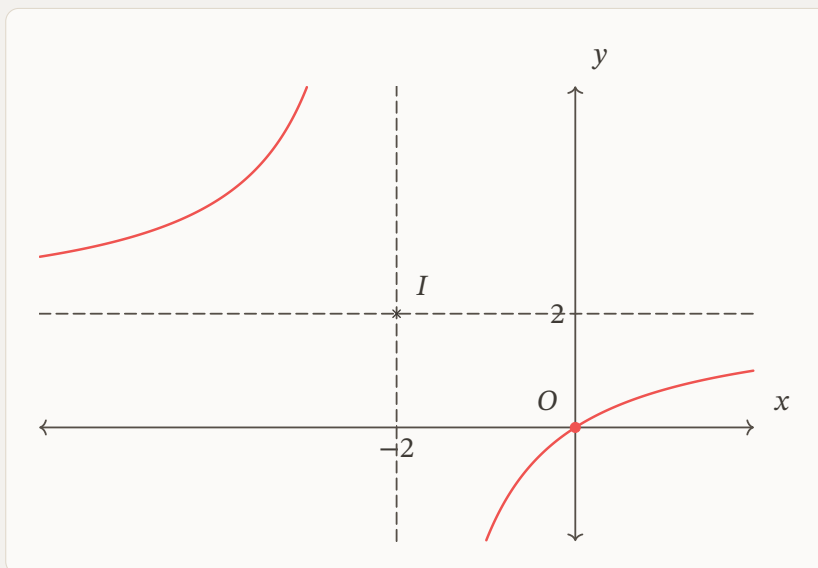
a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$; $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$. Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	2	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	2

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = 2$; tâm $I(-2; 2)$; giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Hai trục đối xứng là $y - 2 = \pm(x + 2)$. Nhánh trái ở trên, nhánh phải ở dưới tiệm cận ngang.



Hình 17

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $h(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Đạo hàm bằng 0 tại $-2, 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-2; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng 4; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty;$$

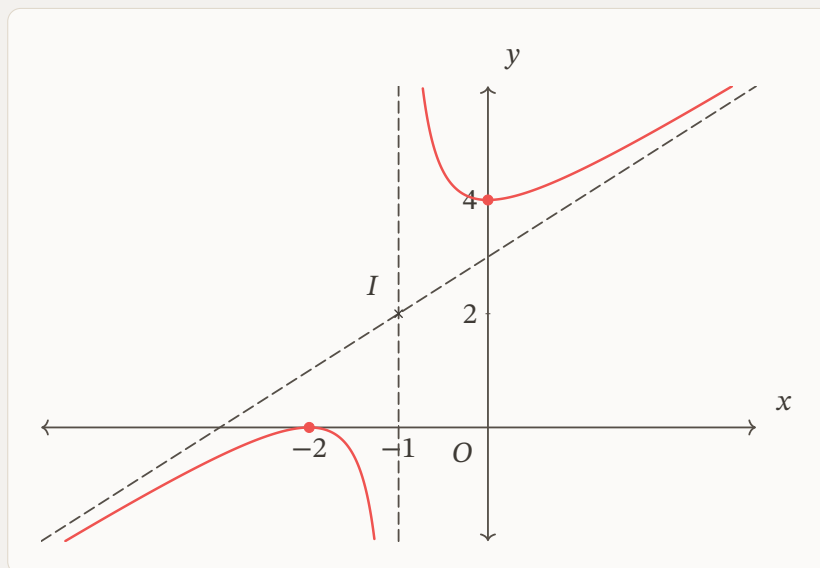
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x + 3)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x + 3)] = 0.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = x + 3$; tâm $I(-1; 2)$. Đồ thị giao với trục hoành tại $(-2; 0)$ vì $h(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$; giao điểm với trục tung $(0; 4)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận.



Hình 18

- c) Với $v(x) = x + 3 - \frac{1}{x+1}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $v'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty;$$

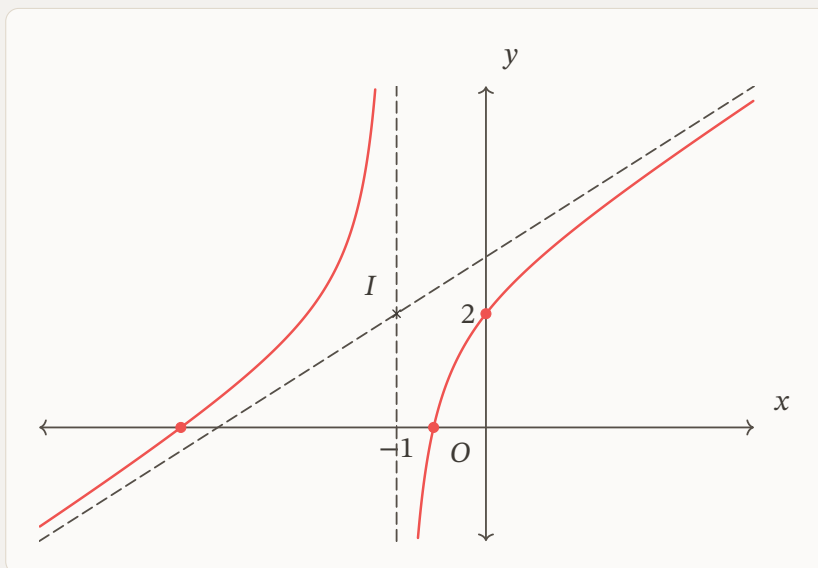
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x + 3)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x + 3)] = 0.$$

Tiệm cận $x = -1$, $y = x + 3$; tâm $I(-1; 2)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới đường xiên.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đồ thị giao với trục hoành tại $(-2 - \sqrt{2}; 0)$, $(-2 + \sqrt{2}; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 2)$. Các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi $x = -1$ và $y = x + 3$.



Hình 19

Ý này xác nhận khảo sát trường hợp không cực trị khi cả lập luận, bảng và hình đều đúng.

- d) $A'(x) = -\frac{20}{x^2} < 0$. Trên $[2; +\infty)$, lớn nhất $A(2) = 11$; không có giá trị nhỏ nhất vì hàm tiếp tục giảm, $A(x) > 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 1$. Trên $[2; 10]$, lớn nhất vẫn 11, nhỏ nhất $A(10) = 3$, đều tính bằng triệu đồng mỗi tấn. Phải nêu sự khác nhau giữa cận không đạt ở tập đang xét ban đầu và giá trị đạt tại đầu mút ở tập đang xét sau.

Tiêu chí: đánh dấu riêng ý đã tự làm; ý a không xác nhận phân thức bậc hai, ý b không xác nhận trường hợp không cực trị, ý c xác nhận riêng trường hợp không cực trị, ý d không xác nhận khảo sát phân thức.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 25 – Bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

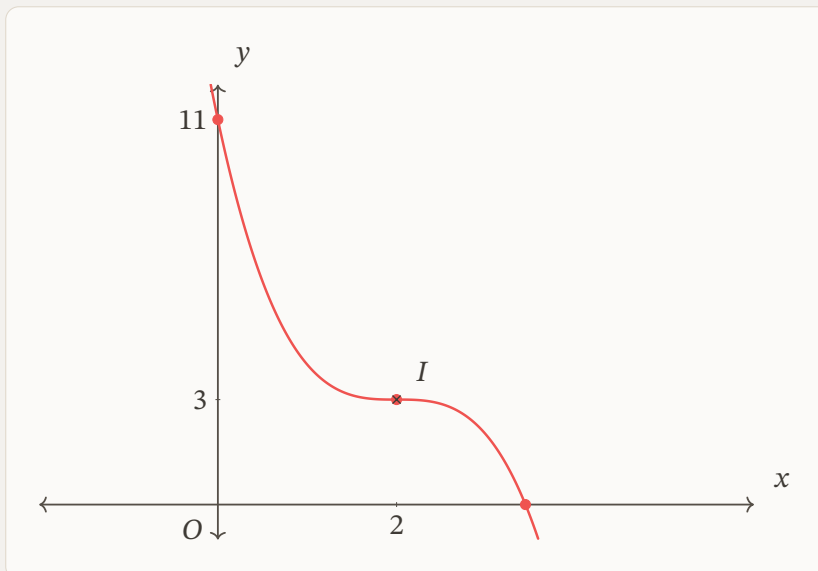
- a) Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = -3(x - 2)^2$, dấu âm ở cả hai phía của 2, bằng 0 chỉ tại mốc này. Hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(2; 3)$; không tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(2 + \sqrt{3}; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 11)$. Hoành độ giao điểm với trục hoành được tìm từ phương trình $p(x) = 0$, không phải từ phương trình đạo hàm.



Hình 20

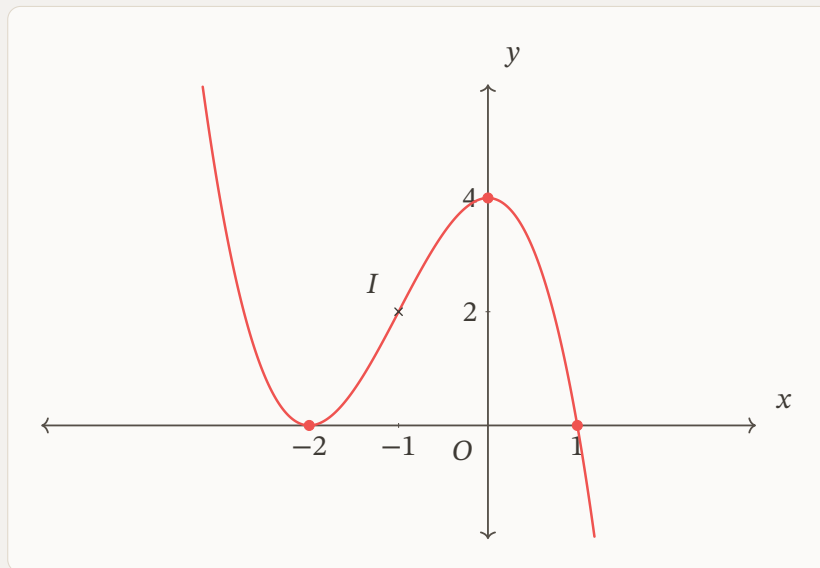
- b) Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = -3x(x + 2)$, dấu $-$, $+$, $-$ trên ba khoảng chia bởi $-2, 0$; bằng 0 tại hai mốc. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$, giá trị cực tiểu bằng 0; điểm cực tiểu của đồ thị là $(-2; 0)$, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại bằng 4; điểm cực đại của đồ thị là $(0; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = -(x - 1)(x + 2)^2$; giao điểm với trục hoành $(-2; 0)$, $(1; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 4)$; tâm $I(-1; 2)$; không tiệm cận.



Hình 21

Tiêu chí: đủ kiện đúng và hình đúng; giữ nguyên kết quả bài kiểm tra cũ, ghi bằng chứng sửa riêng.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 26 – Phân thức và bài toán thực tế

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

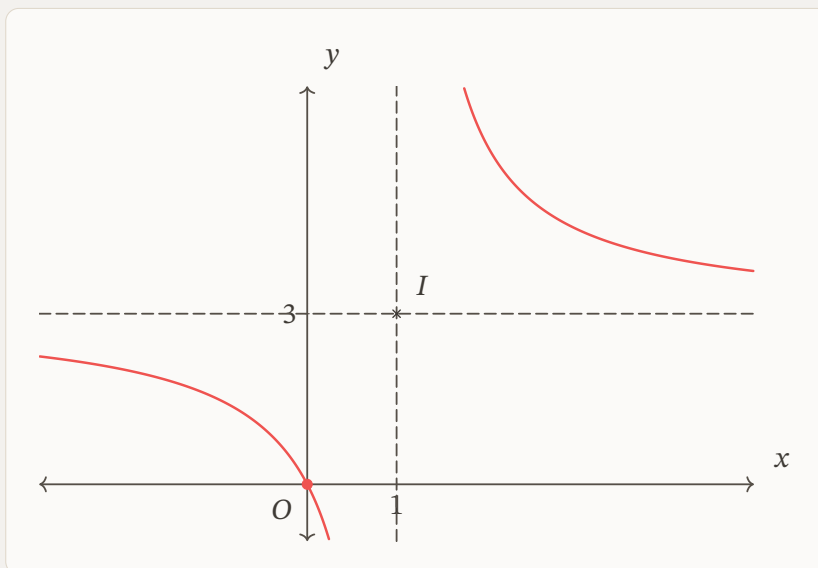
a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = 3 + \frac{3}{x-1}$; $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0$. Hàm nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Biến thiên	3	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	3

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 1$, $y = 3$; tâm $I(1; 3)$; giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Hai trục đối xứng là $y - 3 = \pm(x - 1)$. Nhánh trái ở dưới, nhánh phải ở trên tiệm cận ngang.



Hình 22

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $h(x) = x + 2 + \frac{4}{x+2}$,

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

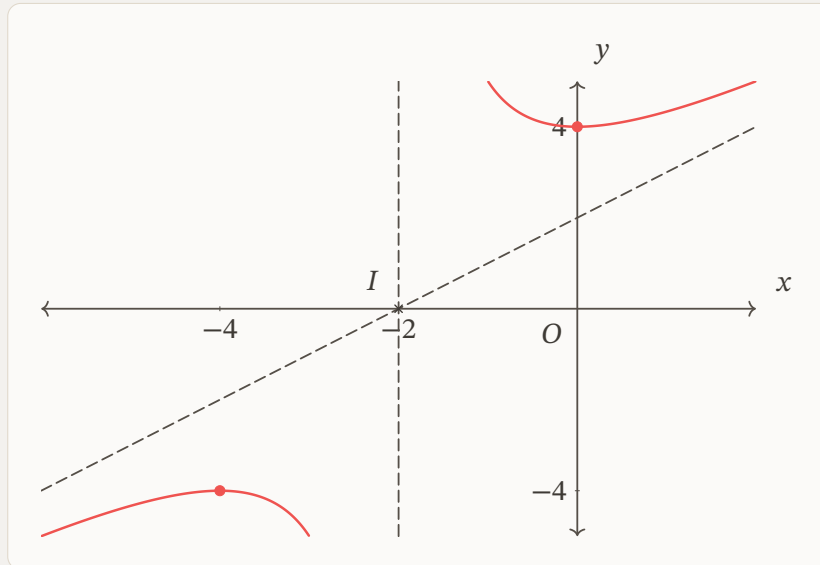
Đạo hàm bằng 0 tại $-4, 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -4$, giá trị cực đại bằng -4 ; điểm cực đại của đồ thị là $(-4; -4)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng 4 ; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; 4)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = x + 2$; tâm $I(-2; 0)$. Không giao điểm với trục hoành vì tử $(x+2)^2 + 4 > 0$; giao điểm với trục tung tại $(0; 4)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận.



Hình 23

- c) Với $v(x) = x + 2 - \frac{4}{x+2}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $v'(x) = 1 + \frac{4}{(x+2)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} v(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty;$$

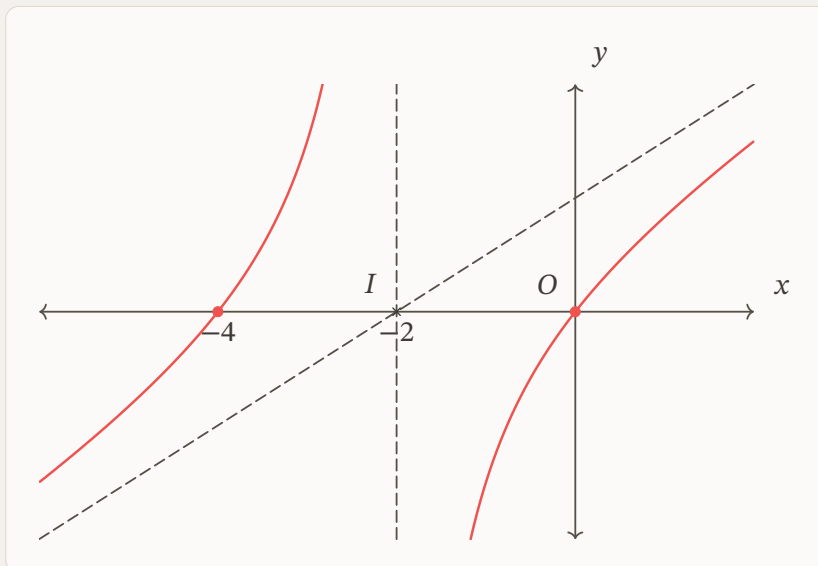
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x + 2)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x + 2)] = 0.$$

Tiệm cận $x = -2$, $y = x + 2$; tâm $I(-2; 0)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới đường xiên.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đồ thị giao với trục hoành tại $(-4; 0)$, $(0; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 0)$. Các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi $x = -2$ và $y = x + 2$.



Hình 24

Ý này xác nhận khảo sát trường hợp không cực trị khi cả lập luận, bảng và hình đều đúng.

- d) $A'(x) = -\frac{24}{x^2} < 0$. Trên $[3; +\infty)$, lớn nhất $A(3) = 12$, không có giá trị nhỏ nhất; $A(x) > 4$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 4$. Trên $[3; 12]$, lớn nhất 12, nhỏ nhất $A(12) = 6$, đơn vị triệu đồng mỗi tấn. Ghi rõ đầu mút đạt được.

Tiêu chí và giới hạn từng ý như tên kĩ năng trong đề; kết quả sửa được ghi riêng, không thay bài kiểm tra gốc.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 27 – Bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

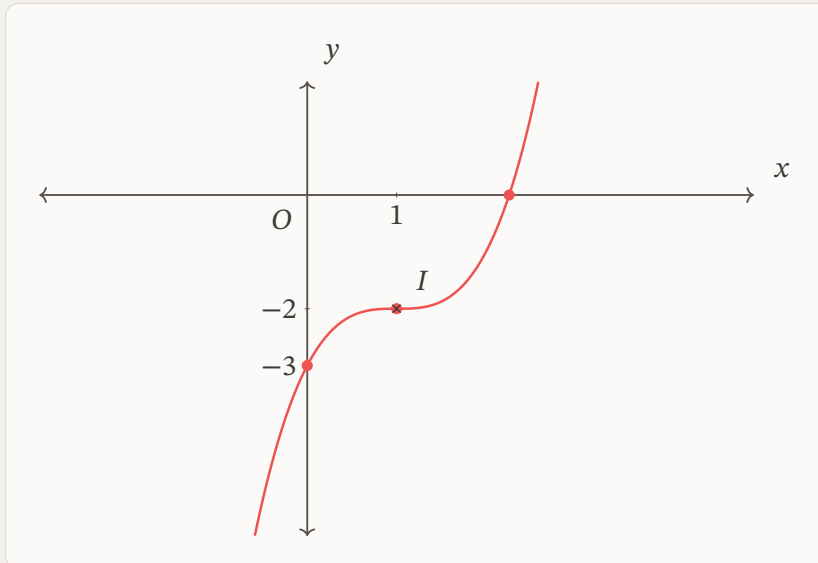
- a) Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = 3(x - 1)^2$, dấu dương ở cả hai phía của 1, bằng 0 chỉ tại mốc này. Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(1; -2)$; không tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(1 + \sqrt[3]{2}; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; -3)$. Hoành độ giao điểm với trục hoành được tìm từ phương trình $p(x) = 0$, không phải từ phương trình đạo hàm.



Hình 25

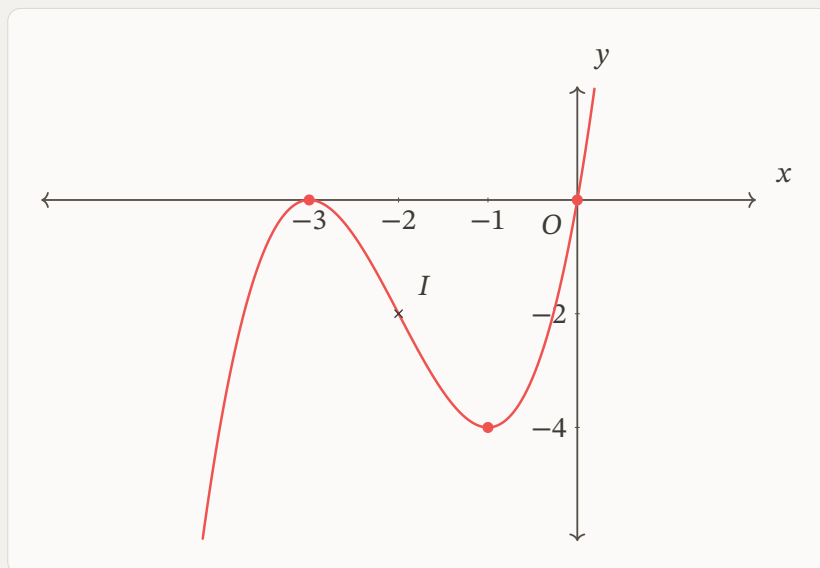
- b) Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3(x+3)(x+1)$, dấu $+$, $-$, $+$ trên ba khoảng chia bởi -3 , -1 ; bằng 0 tại hai mốc. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-3; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, giá trị cực tiểu bằng -4 ; điểm cực tiểu của đồ thị là $(-1; -4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = x(x+3)^2$; giao điểm với trục hoành $(-3; 0)$, $(0; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 0)$; tâm $I(-2; -2)$; không tiệm cận.



Hình 26

Tiêu chí: tự khôi phục đủ quy trình; ghi khoảng trẽ thực tế và phần đã phải xem hỗ trợ.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 28 – Phân thức và bài toán thực tế

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

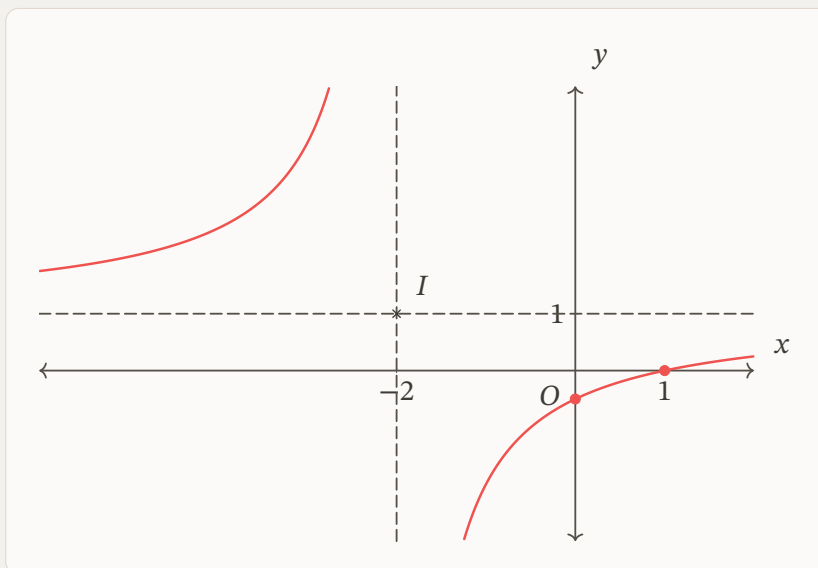
- a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$; $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$. Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	1	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	1

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = 1$; tâm $I(-2; 1)$; giao điểm với trục hoành tại $(1; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; -\frac{1}{2})$. Hai trục đối xứng là $y - 1 = \pm(x + 2)$. Nhánh trái ở trên, nhánh phải ở dưới tiệm cận ngang.



Hình 27

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; $h(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Đạo hàm bằng 0 tại 1, 3. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại bằng -1 ; điểm cực đại của đồ thị là $(1; -1)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu bằng 3; điểm cực tiểu của đồ thị là $(3; 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = +\infty;$$

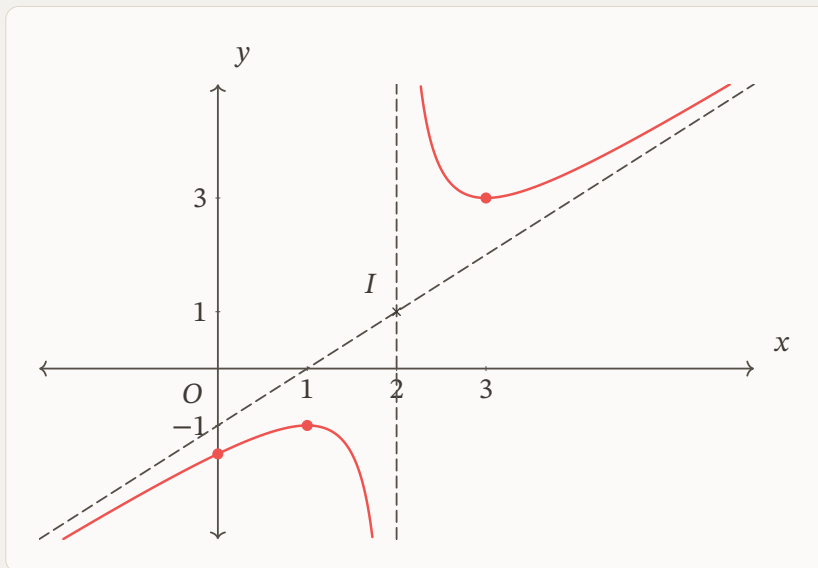
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x - 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x - 1)] = 0.$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		+		−		−		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	−1	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 2$, $y = x - 1$; tâm $I(2; 1)$. Không giao điểm với trục hoành vì $x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; giao điểm với trục tung $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận.



Hình 28

- c) Với $v(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $v'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} v(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty;$$

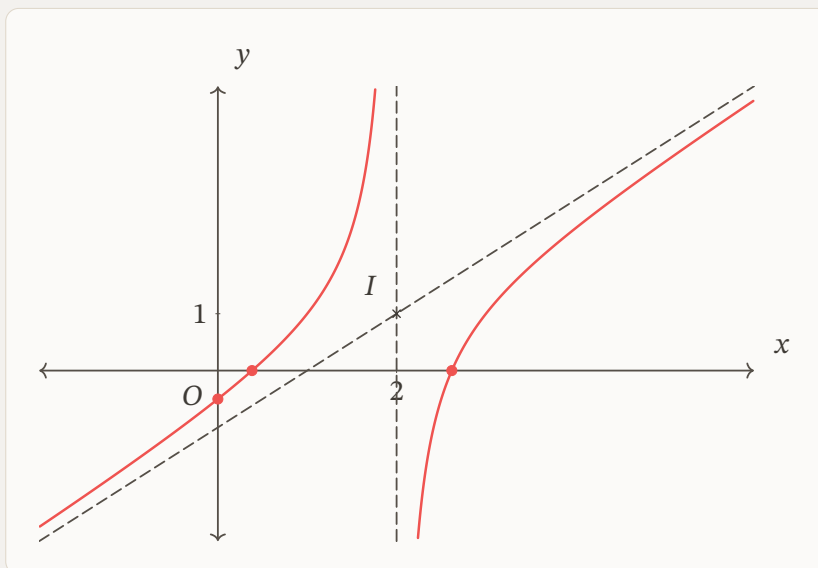
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x - 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x - 1)] = 0.$$

Tiệm cận $x = 2$, $y = x - 1$; tâm $I(2; 1)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới đường xiên.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đồ thị giao với trục hoành tại $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$; giao điểm với trục tung $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi $x = 2$ và $y = x - 1$.



Hình 29

Ý này xác nhận khảo sát trường hợp không cực trị khi cả lập luận, bảng và hình đều đúng.

- d) $A'(x) = -\frac{36}{x^2} < 0$. Trên $[3; +\infty)$, lớn nhất $A(3) = 14$, không có giá trị nhỏ nhất; $A(x) > 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 2$. Trên $[3; 9]$, lớn nhất 14, nhỏ nhất $A(9) = 6$, đơn vị triệu đồng mỗi tấn.

Tiêu chí: tách kết quả các ý; bài làm ngay sau hỗ trợ chưa chứng minh nhớ lâu. Lên lịch xác nhận tiếp nếu còn tái lỗi; không lấy trước câu của lượt ôn khác.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

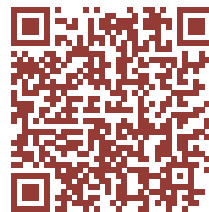
Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*, ban hành kèm Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT. Phần lớp 12, trang 106–107.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một*, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống. Bài 4, trang 26–32: sơ đồ khảo sát, hàm bậc ba, hai họ phân thức và tính đối xứng.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học