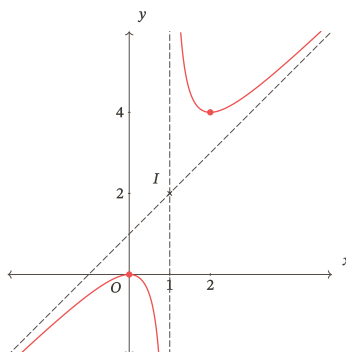


Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Bài học

Kiến thức, ví dụ và câu hỏi tự kiểm tra.



Mở trang Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

R1-G04

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học và chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học và hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	3
Bài học	4
Khởi động	4
1. Từ dữ kiện đến sơ đồ khảo sát	5
2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba	6
3. Khảo sát hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất	8
4. Khảo sát hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất	10
5. Giải thích kết quả khảo sát trong bài toán thực tế	13
Khép lại bài học	14
Nguồn	15

Bắt đầu

Một bảng biến thiên đúng chưa bảo đảm hình vẽ đã đúng. Nếu quên một điểm bị loại, đặt sai giao điểm hoặc nối hai nhánh qua tiệm cận đứng, em có thể vẽ một đồ thị trái với chính phép tính của mình. Học liệu này giúp em tổ chức kết quả khảo sát và dùng các biểu diễn để kiểm tra lẫn nhau.

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Tổ chức bản khảo sát	Lập bản khảo sát có đủ tập xác định, đạo hàm, biến thiên, cực trị, giới hạn và tiệm cận khi có; nhận ra thông tin còn thiếu.
Khảo sát hàm số bậc ba	Vẽ đồ thị hàm số bậc ba; đọc dấu đạo hàm, cực trị và hai đầu đồ thị; phân biệt có cực trị với có điểm đạo hàm bằng 0 nhưng không có cực trị.
Khảo sát phân thức bậc nhất trên bậc nhất	Giữ đúng hai khoảng xác định, tìm tiệm cận và hướng của từng nhánh.
Khảo sát phân thức bậc hai trên bậc nhất	Giữ đúng khoảng xác định và hướng nhánh; nối phép chia, tiệm cận xiên và biến thiên.
Nhận biết đối xứng	Nhận biết tâm đối xứng; với hai họ phân thức đang xét, nhận biết các trục đối xứng theo hai đường phân giác của các tiệm cận.
Kiểm các biểu diễn và diễn giải mô hình	Kiểm sự phù hợp giữa công thức, bảng biến thiên và đồ thị; giải thích kết quả trong điều kiện của biến và đơn vị của mô hình.

Ba họ hàm của phần khảo sát đầy đủ là

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0;$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0;$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0,$$

với đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu ở họ cuối. Điều kiện của từng mẫu số vẫn phải được xét.

Nguồn đối chiếu: Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, phần lớp 12, trang 106.

Tiên quyết

Em cần biết tìm tập xác định, tính đạo hàm, xét dấu, xác định cực trị từ dấu đạo hàm, đọc giới hạn và tìm tiệm cận trong trường hợp đơn giản. Các kiến thức đã học trong “Đơn điệu và cực trị”, “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”, “Đường tiệm cận” được nối lại ở đây; không cần làm lại toàn bộ những học liệu ấy nếu đã có nền phù hợp.

Khởi động (trang 4) giúp tự kiểm một số thao tác thiết yếu. Thiếu phần nào thì mở đúng thẻ **Ôn nền** (mở trên trang học liệu), không coi làm đúng Khởi động là đã đạt cả học liệu.

Cách học và chọn nơi bắt đầu

Chuẩn bị giấy để lưu bài tự làm, bảng và hình. Đọc Gợi mở rồi thử trả lời trước phần giải thích. Khi vẽ, ghi dữ kiện đã tính trước, sau đó mới nối dáng điệu đường cong. Sau mỗi mục, tự làm nhiệm vụ cuối mỗi mục.

- Cần học hoặc nhớ lại: mở Bài học (trang 4).
- Đã nắm phần học, muốn tự thực hiện: mở **Luyện tập** (mở trên trang học liệu).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào thẳng **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu), kể cả chưa làm những phần trước.
- Đến ngày hẹn: mở đúng lượt **Ôn lại** (mở trên trang học liệu).

Bản đồ học và hỗ trợ

Bài học (trang 4) → **Luyện tập** (mở trên trang học liệu) → **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) → **Ôn lại** (mở trên trang học liệu)

Đây là tiến trình khuyến nghị và thứ tự tra đọc, không phải điều kiện bắt buộc hoàn tất tuần tự. Phần bỏ qua không tự được coi là đã đạt.

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Quên cách tổ chức bản khảo sát	Sơ đồ khảo sát (trang 5)	Trở lại nhiệm vụ đang làm
Vướng cách xử lí một họ hàm	Bậc ba (trang 6), phân thức bậc nhất (trang 8), phân thức bậc hai (trang 10)	Sửa đúng bước còn vướng
Thiếu thao tác nền	Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu nền phù hợp rồi trở về bài gốc
Đã tự làm và muốn đổi chiều	Lời giải (mở trên trang học liệu), Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) khi cần	Giữ kết quả gốc, xác nhận riêng phần sau hỗ trợ
Cần lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi dữ kiện đã có; không bắt ghi sau từng câu

Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi. Riêng **một lượt Kiểm tra không chia thành nhiều đợt** và phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần trợ giúp, kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước; phần làm sau trợ giúp không tính ngược vào kết quả độc lập.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Dùng **bảng đối chiếu sau Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) để xem từng mục tiêu. Hoàn tất lượt chính khi có bài làm tự lực phù hợp, những lỗi thiết yếu đã được kiểm lại và các giới hạn còn lại được ghi rõ. Kết quả đúng ở một mục tiêu không thay bằng chứng của mục tiêu còn sai.

Sau khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn ôn sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày, 3–4 tuần. Có thể học tiếp nội dung đủ tiên quyết trong khi chờ ôn. Nếu chưa có câu phù hợp chưa gặp trước đó để xác nhận, ghi “chưa đủ bằng chứng”; không tự coi bài đã đọc lời giải là bài mới.

Bài học

Câu hỏi dẫn đường

Mỗi nét trên đồ thị được bảo đảm bởi dữ kiện nào?

Khởi động

Tự làm trước khi tra lời giải. Ghi cả điều kiện và lí do, không chỉ đáp số.

Nhiệm vụ 01 – Tập xác định trước và sau rút gọn

Cho $r(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. Tìm tập xác định, rút gọn trên tập xác định ấy và giải thích vì sao sau rút gọn không được tự thêm điểm có hoành độ 3 vào đồ thị.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 02 – Đạo hàm và dấu

Với $p(x) = x^3 - 12x$, tính $p'(x)$, xét dấu trên các khoảng và xác định hoành độ cực trị. Một nghiệm của đạo hàm phải được kiểm thêm điều gì trước khi kết luận cực trị?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 03 – Giới hạn có hướng

Cho $q(x) = 1 + \frac{2}{x+2}$. Tính giới hạn khi $x \rightarrow -2^-$, $x \rightarrow -2^+$, $x \rightarrow -\infty$ và $x \rightarrow +\infty$. Ghi các đường tiệm cận tương ứng.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 04 – Thương và phần dư

Viết $\frac{x^2+2x+5}{x+1}$ thành một đa thức bậc nhất cộng một phân thức có tử là hằng số. Ghi điều kiện, rồi kiểm phép chia bằng cách lấy mẫu nhân với thương và cộng phần dư.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Điểm dừng 01 – Sau khi làm xong

Bài/điều còn vướng	Phần cần ôn	Trở lại bài
Tập xác định và rút gọn	Giữ điều kiện xác định. Xem Tập xác định (mở trên trang học liệu).	Nhiệm vụ 01 của Khởi động (trang 4)
Đạo hàm hoặc xét dấu	Tính đạo hàm, xét dấu trên từng khoảng. Xem Đạo hàm và dấu (mở trên trang học liệu).	Nhiệm vụ 02 của Khởi động (trang 4)
Hướng giới hạn	Đọc đúng phía tiến tới. Xem Giới hạn và tiệm cận (mở trên trang học liệu).	Nhiệm vụ 03 của Khởi động (trang 4)
Phép chia đa thức	Kiểm thương và phần dư. Xem Thương và phần dư (mở trên trang học liệu).	Nhiệm vụ 04 của Khởi động (trang 4)

Nếu thao tác đã vững, vào mục đầu Bài học (trang 5) hoặc chọn hoạt động phù hợp; không phải đi qua mọi thẻ nền.

1. Từ dữ kiện đến sơ đồ khảo sát

Gợi mở 01 – Cùng đạo hàm, có cùng đồ thị?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Hai hàm số $u(x) = x^3 + x$ và $v(x) = x^3 + x + 2$ có cùng đạo hàm. Nếu biết dấu đạo hàm của chúng, em đã có thể vẽ chúng thành cùng một đồ thị chưa? Hãy so sánh tại $x = 0$.

Ta có $u(0) = 0$ và $v(0) = 2$. Dấu đạo hàm cho cùng chiều biến thiên nhưng chưa xác định vị trí đồ thị. Cần ghép thêm giá trị, giới hạn và các dữ kiện đặc trưng.

1.1. Phương pháp – Sơ đồ khảo sát

Một bản khảo sát gồm ba việc chính:

- **Tìm tập xác định.** Ghi rõ những điểm bị loại; những khoảng bị tách không được nối qua nhau.
- **Khảo sát sự biến thiên.** Tính đạo hàm. Trong tập xác định, tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại; xét dấu đạo hàm trên từng khoảng để kết luận chiều biến thiên và cực trị. Tiếp đó, tính các giới hạn cần thiết, xác định tiệm cận nếu có và lập bảng biến thiên.
- **Vẽ đồ thị dựa trên bảng biến thiên.** Bổ sung giao điểm với các trục hoặc điểm đặc trưng để tính; lưu ý tính đối xứng.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 26–27.

Trong bài này, các hàm số bậc ba và hai dạng hàm phân thức đang xét đều có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định. Với hàm phân thức, giá trị làm mẫu số bằng 0 không thuộc tập xác định: hàm số không có giá trị tại đó, nên đó không thể là điểm cực trị của hàm số. Ta vẫn xét giới hạn khi biến tiến gần giá trị bị loại để tìm tiệm cận đứng, nếu có.

Trong bảng biến thiên, cần phân biệt giá trị hàm số tại một điểm với giới hạn khi biến tiến gần điểm đó. Nếu một giá trị không thuộc tập xác định, không ghi giới hạn như thể đó là giá trị hàm số tại điểm bị loại. Khi tập xác định gồm hai khoảng rời nhau, lập bảng và vẽ riêng từng nhánh. Hình chỉ thể hiện một phần đồ thị; kết luận về giới hạn phải dựa vào phép tính hoặc dữ kiện đã cho.

1.2. Ví dụ 01 – Cùng dấu đạo hàm, khác vị trí

Với hai hàm ở Gợi mở, $u'(x) = v'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ trên $\mathbb{R}$. Cả hai đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị; cùng tiến tới $-\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$ và $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Nhưng $v(x) - u(x) = 2$ với mọi x : đồ thị thứ hai cao hơn đồ thị thứ nhất một khoảng theo phương thẳng đứng bằng 2 tại cùng hoành độ. Chỉ một bảng ghi dấu và chiều đi chưa quyết định được tung độ từng điểm.

Tự kiểm một hình vừa vẽ: điểm đã đánh dấu có thỏa công thức không; chiều đường cong có khớp dấu đạo hàm không; hướng gần tiệm cận có đúng giới hạn một phía không; có vô tình thêm một điểm bị loại không?

1.3. Nhiệm vụ 05 – Tìm mâu thuẫn trước khi nổi nét

Một bản khảo sát của $h(x) = x^3 + x - 1$ ghi: tập xác định $\mathbb{R}$; đạo hàm $3x^2 + 1 > 0$; đồng biến trên $\mathbb{R}$; đồ thị đi qua $O(0; 0)$. Chỉ ra phần sai, sửa lại và bổ sung hai giới hạn ở vô cực. Bản sửa đã cho phép kết luận có cực trị chưa?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu chưa biết kiểm tra một điểm có thuộc đồ thị hay không, thay hoành độ của điểm vào công thức rồi so sánh kết quả với tung độ đã cho; xem cách dùng giá trị hàm số ở Ví dụ 01 (trang 5).

2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Gợi mở 02 – Đổi dấu và đổi chiều

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu đạo hàm lần lượt mang dấu dương, âm, dương trên ba khoảng liên tiếp, đồ thị đổi chiều thế nào? Nếu đạo hàm chỉ bằng 0 tại một điểm nhưng dương ở cả hai phía, điều gì trong dự đoán ấy phải thay đổi?

Trường hợp dấu gọi hai lần đổi chiều; trường hợp sau không có sự đổi chiều tại mốc ấy. Để kết luận cực trị phải xét điểm thuộc tập xác định và dấu hai phía, không chỉ giải phương trình đạo hàm.

2.1. Những thông tin cần giữ

Với $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, tập xác định là $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Dấu của tam thức này quyết định chiều biến thiên. Khi có hai nghiệm phân biệt, xét đủ các khoảng; khi có nghiệm kép, kiểm việc đạo hàm không đổi dấu; khi không có nghiệm thực, dấu không đổi trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm bậc ba không có tiệm cận và có tâm đối xứng là điểm trên đồ thị có hoành độ $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Vì vậy phải lấy cả tung độ $f(x_0)$, không nhầm x_0 với một điểm. Quy tắc dấu và cực trị xem **Đơn điệu và cực trị**.

Nguồn đổi chiều: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 27.

2.2. Ví dụ 02 – Hai cực trị và một nghiệm kép của hàm

Khảo sát $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1),$$

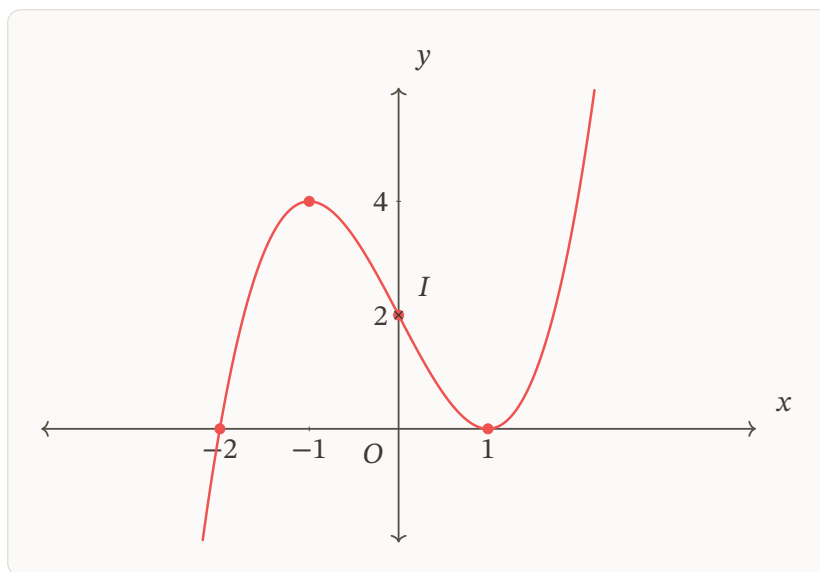
nên hàm đồng biến trên $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$. Hàm đạt cực đại tại $x = -1$ với giá trị 4, cực tiểu tại $x = 1$ với giá trị 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Vì $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, giao với trục hoành là $(-2; 0)$ và $(1; 0)$; giao với trục tung là $(0; 2)$. Tâm đối xứng là $I(0; 2)$. Đồ thị không có tiệm cận. Tại $(1; 0)$, đường cong chạm trục hoành rồi đi lên; tại $(-2; 0)$, nó đi qua trục hoành.



Hình 1

Hai giao điểm với trục hoành không phải hai điểm cực trị: phải đọc riêng nghiệm của hàm và nghiệm của đạo hàm.

2.3. Ví dụ 03 – Đạo hàm bằng không mà không có cực trị

Với $g(x) = x^3 + 1$, tập xác định là $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2, \quad g'(0) = 0.$$

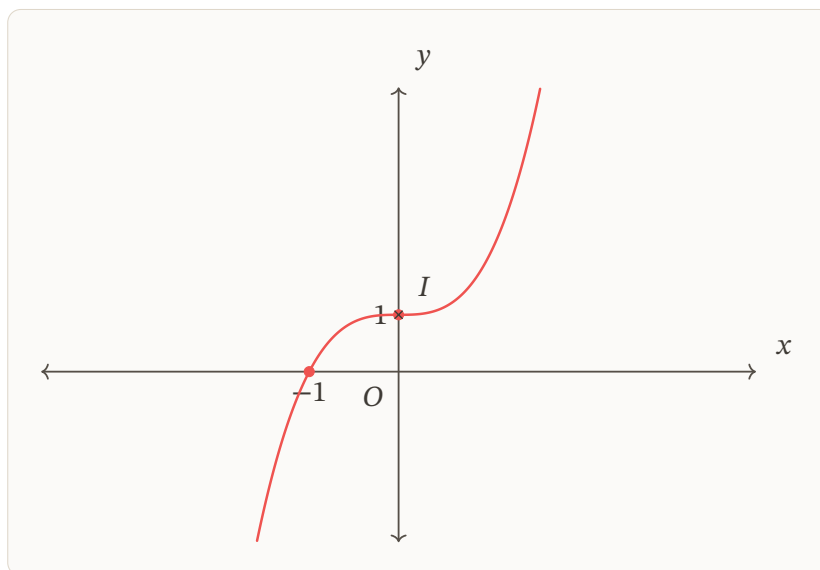
Đạo hàm dương ở cả hai phía của 0. Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị tại 0 hoặc nơi nào khác.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Các giao điểm với trục hoành và trục tung lần lượt là $(-1; 0)$ và $(0; 1)$; tâm đối xứng $I(0; 1)$; không có tiệm cận. Điểm có tiếp tuyến ngang vẫn nằm trên một đường cong tiếp tục đi lên qua điểm ấy.



Hình 2

Hàm $u(x) = x^3 + x$ ở Ví dụ 01 cũng không có cực trị, nhưng đạo hàm của nó không bằng 0 ở đâu. Hai trường hợp cùng không có cực trị cần được phân biệt.

2.4. Nhiệm vụ 06 – Một điểm dừng không đổi chiều

Với $p(x) = -(x - 1)^3 + 2$, tìm đạo hàm, lập bảng biến thiên, kết luận cực trị và xác định tâm đối xứng. Phác đồ thị bằng tâm và các điểm có hoành độ 0, 2; không cần viết chính xác giao điểm với trục hoành.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu còn nhầm đạo hàm bằng 0 với cực trị, xem lại Ví dụ 03 (trang 7).

3. Khảo sát hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất

Gợi mở 03 – Cùng tiệm cận, khác vị trí

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Hai đồ thị cùng có tiệm cận $x = 1$, $y = 2$ có nhất thiết cùng nằm về một phía của đường $y = 2$ khi $x > 1$ không? So sánh dấu của $\frac{3}{x-1}$ và $-\frac{3}{x-1}$ trên khoảng ấy.

Một phần dư dương cho nhánh bên phải nằm trên đường ngang; phần dư âm cho nhánh bên phải nằm dưới. Hai đường tiệm cận chưa cho biết toàn bộ vị trí và chiều đi của các nhánh.

3.1. Từ công thức đến hai nhánh

Với $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, điều kiện $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ bảo đảm đây không phải hàm hằng sau rút gọn. Ta xét mẫu khác 0, tính đạo hàm và các giới hạn. Không kết luận đơn điệu trên “toàn tập xác định” chỉ từ một dấu đạo hàm nếu tập xác định gồm hai khoảng rời.

Đồ thị nhận giao điểm hai tiệm cận làm tâm đối xứng; hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận là các trục đối xứng. Khi dùng hình để nhận đối xứng, hai trục tọa độ phải có cùng tỉ lệ độ dài.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 28–29.

3.2. Ví dụ 04 – Ghép biến thiên với tiệm cận ngang

Khảo sát

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0 \quad (x \neq 1).$$

Hàm nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty;$$

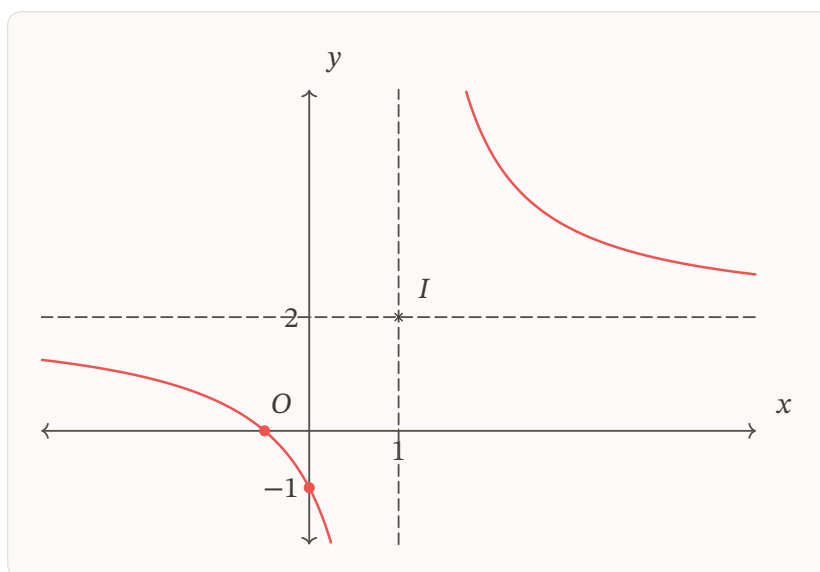
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Hai tiệm cận là $x = 1, y = 2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		–		–	
$f(x)$	2	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	2

Bảng biến thiên

Ở mốc $x = 1$, các kí hiệu $-\infty$ và $+\infty$ trong hàng $f(x)$ biểu thị giới hạn từ bên trái và bên phải; chúng không phải giá trị $f(1)$, vì 1 không thuộc tập xác định. Đồ thị đi qua $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(0; -1)$; có tâm $I(1; 2)$ và hai trục đối xứng $y - 2 = x - 1$, $y - 2 = -(x - 1)$. Với $x < 1$, đồ thị nằm dưới $y = 2$; với $x > 1$, nằm trên $y = 2$.



Hình 3

Không đặt một điểm đặc ở giao hai tiệm cận: tâm đối xứng không thuộc đồ thị này.

3.3. Nhiệm vụ 07 – Hai nhánh đồng biến

Khảo sát và vẽ đồ thị $g(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$. Ghi tập xác định, đạo hàm, khoảng đơn điệu, cực trị, bốn giới hạn cần thiết, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng. Vì sao không nối đường cong qua $x = -2$?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu chưa biết kết hợp chiều biến thiên và tiệm cận để vẽ hai nhánh, xem lại Ví dụ 04 (trang 9).

4. Khảo sát hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất

Gợi mở 04 – Phần dư và cực trị

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

So sánh hai hàm

$$u(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}, \quad v(x) = x + 1 - \frac{1}{x-1}.$$

Chúng cùng tiến gần đường thẳng nào khi $x \rightarrow +\infty$? Ở phía $x > 1$, hàm nào nằm trên đường ấy? Có thể từ đó kết luận chúng có cùng cực trị không?

Phần chênh lệch của cả hai với $x + 1$ tiến về 0, nhưng mang dấu trái nhau. Muốn biết cực trị phải tính đạo hàm; cùng tiệm cận không đủ.

4.1. Phần thương, phần dư và đối xứng

Sau phép chia, phân thức trong phạm vi bài có dạng “đa thức bậc nhất cộng phần dư trên mẫu bậc nhất”. Phần dư khác 0 là điều cần giữ theo điều kiện của họ hàm. Tìm tiệm cận xiên bằng giới hạn của **hiệu** giữa hàm số và đa thức thương, với biến tiến tới từng đầu vô cực.

Đồ thị nhận giao điểm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi các tiệm cận làm các trục đối xứng. Không mặc định đường ngang hoặc đường thẳng vuông góc tiệm cận xiên là trục đối xứng.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 30–32.

4.2. Ví dụ 05 – Tiệm cận xiên và hai cực trị

Khảo sát

$$u(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ta có

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Đạo hàm bằng 0 tại 0, 2. Hàm đồng biến trên $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(0; 1)$, $(1; 2)$. Cực đại tại $x = 0$, giá trị 0; cực tiểu tại $x = 2$, giá trị 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Đường $x = 1$ là tiệm cận đứng. Vì

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) - (x + 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) - (x + 1)] = 0,$$

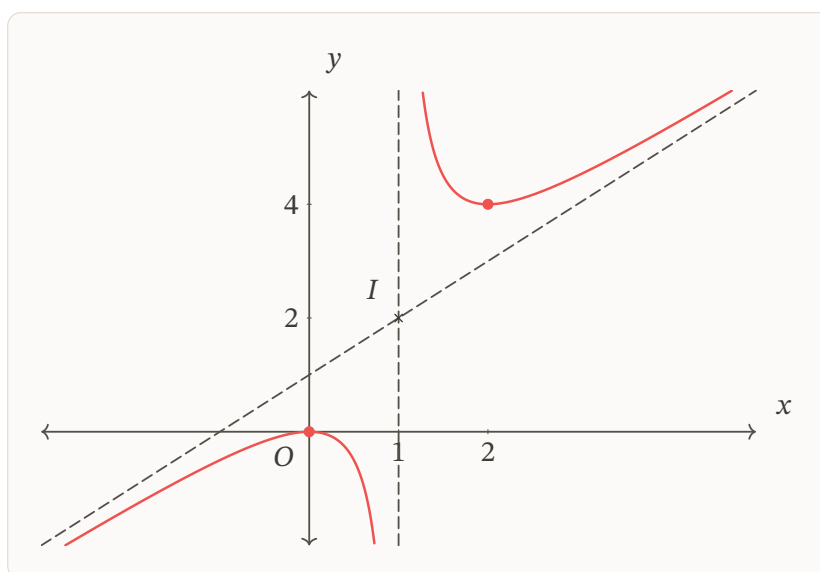
đường $y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm ở bên trong khoảng		+		-		-		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Giá trị $x = 1$ không thuộc tập xác định, nên hai nhánh được xét riêng trên các khoảng ở hai phía của 1. Hai nghiệm của phương trình $u'(x) = 0$ là $x = 0$ và $x = 2$.

Đồ thị giao cả hai trục tại $O(0; 0)$, tâm đối xứng $I(1; 2)$. Nhánh bên trái ở dưới đường xiên; nhánh bên phải ở trên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của $x = 1$ và $y = x + 1$, không phải chính hai tiệm cận.



Hình 4

Giá trị cực đại 0 nhỏ hơn giá trị cực tiểu 4 vẫn có thể xảy ra. Cực đại tại $x = 0$ chỉ được so sánh với giá trị của hàm số ở các điểm đủ gần 0; cực tiểu tại $x = 2$ chỉ được so sánh với giá trị ở các điểm đủ gần 2. Hai kết luận này không yêu cầu giá trị cực đại phải lớn hơn mọi giá trị cực tiểu.

4.3. Ví dụ 06 – Cùng tiệm cận, không có cực trị

Với

$$v(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1} = x + 1 - \frac{1}{x - 1},$$

tập xác định vẫn là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, nhưng

$$v'(x) = 1 + \frac{1}{(x - 1)^2} > 0.$$

Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, không có cực trị.

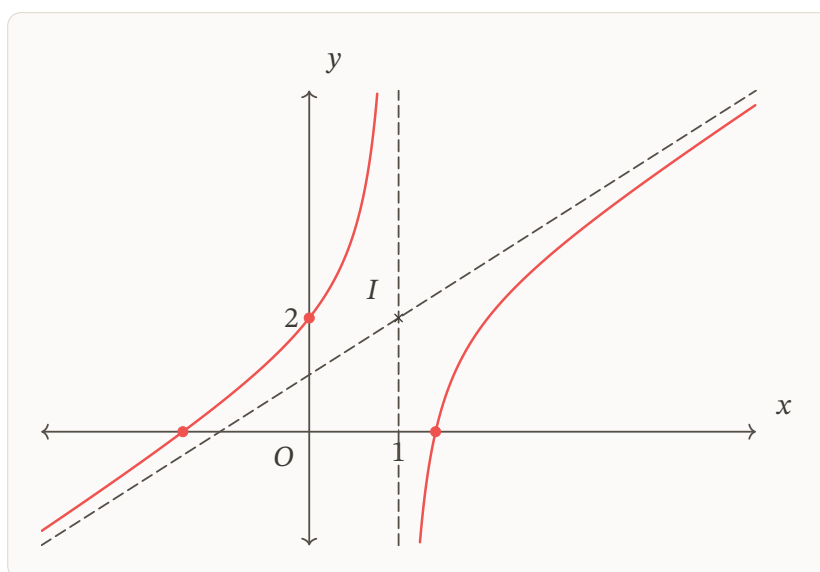
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} v(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} v(x) &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) &= +\infty; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x + 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x + 1)] = 0.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$v'(x)$		+		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận và tâm vẫn là $x = 1$, $y = x + 1$, $I(1; 2)$. Đồ thị giao với trục hoành tại $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 2)$. Nhánh trái nằm trên đường xiên, nhánh phải nằm dưới.



Hình 5

4.4. Nhiệm vụ 08 – Kiểm lại dấu của phần dư

Cho $h(x) = x - 1 - \frac{4}{x-2}$. Tìm tập xác định, đạo hàm, biến thiên, cực trị, tiệm cận và tâm đối xứng. Lập bảng biến thiên và phác hai nhánh; dùng điểm có hoành độ 0 để kiểm vị trí. Không cần giải chính xác giao với trục hoành.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu nhầm dấu đạo hàm hoặc vị trí hai nhánh so với tiệm cận xiên, xem lại Ví dụ 05 (trang 10) và Ví dụ 06 (trang 11).

5. Giải thích kết quả khảo sát trong bài toán thực tế

Gợi mở 05 – Điều kiện của mô hình và giá trị có thể đạt

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Một công thức chi phí trung bình có dạng $A(x) = 2 + \frac{12}{x}$, trong đó x là khối lượng sản phẩm, tính bằng tấn. Công thức có nghĩa toán học khi $x < 0$, nhưng phần đồ thị đó có mô tả sản lượng không? Nếu chỉ xét $1 \leq x \leq 6$, đường ngang $y = 2$ có cho biết giá trị nhỏ nhất trên đoạn này không?

Khối lượng không âm; bài toán còn giới hạn khối lượng được xét. Trên đoạn ấy, giá trị nhỏ nhất phải được tìm trong đoạn, không lấy một giới hạn ở vô cực.

5.1. Ba câu hỏi trước khi diễn giải

Đang xét tập nào? Giá trị nào được đạt trong tập đó? Kết luận đang nói về mô hình được cho hay về thực tế chưa được kiểm chứng?

Các bài dưới đây dùng mô hình chi phí giả định. Biến và đơn vị phải được giữ rõ trong mỗi kết luận; công thức chỉ được dùng trên tập đã cho.

5.2. Ví dụ 07 – Chi phí trung bình có cận nhưng không có giá trị nhỏ nhất

Giả sử tổng chi phí để sản xuất x tấn hàng là $C(x) = 2x + 12$ triệu đồng, mô hình áp dụng với $x \geq 1$. Chi phí trung bình mỗi tấn:

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = 2 + \frac{12}{x}$$

tính bằng triệu đồng mỗi tấn.

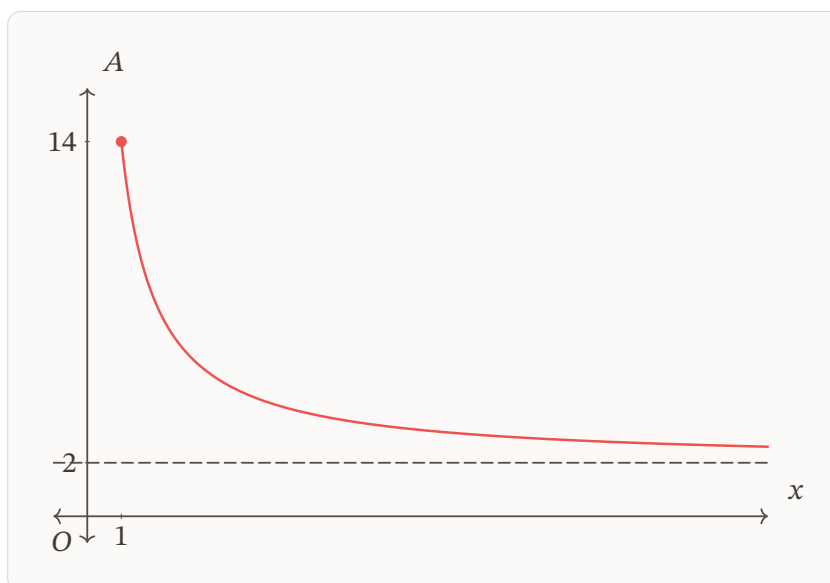
Ta có $A'(x) = -\frac{12}{x^2} < 0$, nên A giảm trên $[1; +\infty)$. Tại $x = 1$, ta được $A(1) = 14$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 2, \quad A(x) > 2 \quad (x \geq 1).$$

Giá trị lớn nhất là 14, đạt tại $x = 1$. Không có giá trị nhỏ nhất: với mỗi $x \geq 1$, chọn khối lượng lớn hơn thì chi phí trung bình nhỏ hơn; không khối lượng hữu hạn nào làm phần $\frac{12}{x}$ bằng 0.

x	1		$+\infty$
$A(x)$	14	$\searrow$	2

Bảng biến thiên



Hình 6

Đường $y = 2$ mô tả xu hướng khi $x \rightarrow +\infty$ trong mô hình. Đồ thị của hàm số với tập xác định $[1; +\infty)$ không có nhánh ứng với $x < 0$ hoặc tiệm cận đứng $x = 0$. Nếu chỉ tìm giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 6]$, ta được $A(6) = 4$, đạt khi sản xuất 6 tấn. Như vậy, cùng một công thức nhưng xét trên hai tập khác nhau có thể cho kết luận khác nhau về giá trị nhỏ nhất.

5.3. Nhiệm vụ 09 – Chi phí trên hai tập đang xét

Một mô hình cho $B(x) = 4 + \frac{18}{x}$ triệu đồng mỗi tấn, với $x \geq 2$. Tìm chiều biến thiên, giá trị lớn nhất và giải thích có hay không giá trị nhỏ nhất. Nếu chỉ xét $[2; 6]$, kết luận về giá trị nhỏ nhất thay đổi thế nào? Không dùng riêng hình vẽ để thay lập luận.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu nhầm cận dưới với giá trị nhỏ nhất, xem lại Ví dụ 07 (trang 13).

Khép lại bài học

Không nhìn lời giải, em hãy giải thích vì sao cần biết tập xác định trước khi xét biến thiên; vì sao đạo hàm bằng 0 chưa đủ kết luận cực trị; và vì sao cùng tiệm cận chưa quyết định cùng đồ thị. Chọn một hình của bài học, chỉ ra dữ kiện bảo đảm mỗi giao điểm, mốc cực trị và hướng nhánh.

Nếu còn vướng, xem đúng mục đó. Nếu đã nắm cách làm, vào **Luyện tập (mở trên trang học liệu)** hoặc chọn hoạt động phù hợp; làm được câu ngay sau ví dụ chưa xác nhận việc nhớ sau khoảng trễ.

Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*, ban hành kèm Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT. Phần lớp 12, trang 106–107.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một*, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống. Bài 4, trang 26–32: sơ đồ khảo sát, hàm bậc ba, hai họ phân thức và tính đối xứng.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học