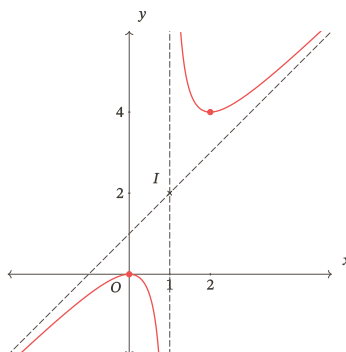


Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Bản đầy đủ, có lời giải

Có toàn bộ bài học, bài tập, lời giải và hướng dẫn chấm.



Mở trang Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

R1-G04

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học và chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học và hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	3
Bài học	4
Khởi động	4
1. Từ dữ kiện đến sơ đồ khảo sát	5
2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba	6
3. Khảo sát hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất	8
4. Khảo sát hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất	10
5. Giải thích kết quả khảo sát trong bài toán thực tế	13
Khép lại bài học	14
Luyện tập	15
Chặng 1 — Bậc ba và phân thức bậc nhất	15
Điểm dừng 02 — Đối chiếu chặng đầu	16
Chặng 2 — Tiệm cận xiên và điều kiện của mô hình	16
Điểm dừng 03 — Đối chiếu khảo sát và diễn giải	17
Kiểm tra	18
Điểm dừng 04 — Kết thúc lượt và đối chiếu kết quả	18
Ôn lại	20
Lượt 1 — Sau khoảng 2–3 ngày	20
Lượt 2 — Sau khoảng 7 ngày	20
Lượt 3 — Sau khoảng 3–4 tuần	21
Ôn nền	22
Sửa lỗi	23
Chọn đúng ý và nơi quay về	23
Khi câu phù hợp đã gặp trước đó hoặc vẫn chưa đúng	25
Sau Luyện tập	25
Sau Kiểm tra	26
Sau Ôn lại	27
Nhật kí	28
Lời giải	30
Bài học	30
Luyện tập	34
Kiểm tra	40
Ôn lại	43
Sửa lỗi	46
Nguồn	62

Bắt đầu

Một bảng biến thiên đúng chưa bảo đảm hình vẽ đã đúng. Nếu quên một điểm bị loại, đặt sai giao điểm hoặc nối hai nhánh qua tiệm cận đứng, em có thể vẽ một đồ thị trái với chính phép tính của mình. Học liệu này giúp em tổ chức kết quả khảo sát và dùng các biểu diễn để kiểm tra lẫn nhau.

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Tổ chức bản khảo sát	Lập bản khảo sát có đủ tập xác định, đạo hàm, biến thiên, cực trị, giới hạn và tiệm cận khi có; nhận ra thông tin còn thiếu.
Khảo sát hàm số bậc ba	Vẽ đồ thị hàm số bậc ba; đọc dấu đạo hàm, cực trị và hai đầu đồ thị; phân biệt có cực trị với có điểm đạo hàm bằng 0 nhưng không có cực trị.
Khảo sát phân thức bậc nhất trên bậc nhất	Giữ đúng hai khoảng xác định, tìm tiệm cận và hướng của từng nhánh.
Khảo sát phân thức bậc hai trên bậc nhất	Giữ đúng khoảng xác định và hướng nhánh; nối phép chia, tiệm cận xiên và biến thiên.
Nhận biết đối xứng	Nhận biết tâm đối xứng; với hai họ phân thức đang xét, nhận biết các trục đối xứng theo hai đường phân giác của các tiệm cận.
Kiểm các biểu diễn và diễn giải mô hình	Kiểm sự phù hợp giữa công thức, bảng biến thiên và đồ thị; giải thích kết quả trong điều kiện của biến và đơn vị của mô hình.

Ba họ hàm của phần khảo sát đầy đủ là

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0;$$
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0;$$
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \quad a \neq 0, \quad d \neq 0,$$

với đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu ở họ cuối. Điều kiện của từng mẫu số vẫn phải được xét.

Nguồn đối chiếu: Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, phần lớp 12, trang 106.

Tiên quyết

Em cần biết tìm tập xác định, tính đạo hàm, xét dấu, xác định cực trị từ dấu đạo hàm, đọc giới hạn và tìm tiệm cận trong trường hợp đơn giản. Các kiến thức đã học trong “Đơn điệu và cực trị”, “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”, “Đường tiệm cận” được nối lại ở đây; không cần làm lại toàn bộ những học liệu ấy nếu đã có nền phù hợp.

Khởi động (trang 4) giúp tự kiểm một số thao tác thiết yếu. Thiếu phần nào thì mở đúng thẻ Ôn nền (trang 22), không coi làm đúng Khởi động là đã đạt cả học liệu.

Cách học và chọn nơi bắt đầu

Chuẩn bị giấy để lưu bài tự làm, bảng và hình. Đọc Gợi mở rồi thử trả lời trước phần giải thích. Khi vẽ, ghi dữ kiện đã tính trước, sau đó mới nối dáng điệu đường cong. Sau mỗi mục, tự làm nhiệm vụ cuối mỗi mục.

- Cần học hoặc nhớ lại: mở Bài học (trang 4).
- Đã nắm phần học, muốn tự thực hiện: mở Luyện tập (trang 15).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào thẳng Kiểm tra (trang 18), kể cả chưa làm những phần trước.
- Đến ngày hẹn: mở đúng lượt Ôn lại (trang 20).

Bản đồ học và hỗ trợ

Bài học (trang 4) → Luyện tập (trang 15) → Kiểm tra (trang 18) → Ôn lại (trang 20)

Đây là tiến trình khuyến nghị và thứ tự tra đọc, không phải điều kiện bắt buộc hoàn tất tuần tự. Phần bỏ qua không tự được coi là đã đạt.

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Quên cách tổ chức bản khảo sát	Sơ đồ khảo sát (trang 5)	Trở lại nhiệm vụ đang làm
Vướng cách xử lí một họ hàm	Bậc ba (trang 6), phân thức bậc nhất (trang 8), phân thức bậc hai (trang 10)	Sửa đúng bước còn vướng
Thiếu thao tác nền	Ôn nền (trang 22)	Tự làm câu nền phù hợp rồi trở về bài gốc
Đã tự làm và muốn đối chiếu	Lời giải (trang 30), Sửa lỗi (trang 23) khi cần	Giữ kết quả gốc, xác nhận riêng phần sau hỗ trợ
Cần lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (trang 28)	Ghi dữ kiện đã có; không bắt ghi sau từng câu

Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi. Riêng **một lượt Kiểm tra không chia thành nhiều đợt** và phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần trợ giúp, kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước; phần làm sau trợ giúp không tính ngược vào kết quả độc lập.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Dùng bảng đối chiếu sau Kiểm tra (trang 18) để xem từng mục tiêu. Hoàn tất lượt chính khi có bài làm tự lực phù hợp, những lỗi thiết yếu đã được kiểm lại và các giới hạn còn lại được ghi rõ. Kết quả đúng ở một mục tiêu không thay bằng chứng của mục tiêu còn sai.

Sau khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn ôn sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày, 3–4 tuần. Có thể học tiếp nội dung đủ tiên quyết trong khi chờ ôn. Nếu chưa có câu phù hợp chưa gặp trước đó để xác nhận, ghi “chưa đủ bằng chứng”; không tự coi bài đã đọc lời giải là bài mới.

Bài học

Câu hỏi dẫn đường

Mỗi nét trên đồ thị được bảo đảm bởi dữ kiện nào?

Khởi động

Tự làm trước khi tra lời giải. Ghi cả điều kiện và lí do, không chỉ đáp số.

Nhiệm vụ 01 – Tập xác định trước và sau rút gọn

Cho $r(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. Tìm tập xác định, rút gọn trên tập xác định ấy và giải thích vì sao sau rút gọn không được tự thêm điểm có hoành độ 3 vào đồ thị.

Xem lời giải (trang 30).

Nhiệm vụ 02 – Đạo hàm và dấu

Với $p(x) = x^3 - 12x$, tính $p'(x)$, xét dấu trên các khoảng và xác định hoành độ cực trị. Một nghiệm của đạo hàm phải được kiểm thêm điều gì trước khi kết luận cực trị?

Xem lời giải (trang 30).

Nhiệm vụ 03 – Giới hạn có hướng

Cho $q(x) = 1 + \frac{2}{x+2}$. Tính giới hạn khi $x \rightarrow -2^-$, $x \rightarrow -2^+$, $x \rightarrow -\infty$ và $x \rightarrow +\infty$. Ghi các đường tiệm cận tương ứng.

Xem lời giải (trang 30).

Nhiệm vụ 04 – Thương và phần dư

Viết $\frac{x^2+2x+5}{x+1}$ thành một đa thức bậc nhất cộng một phân thức có tử là hằng số. Ghi điều kiện, rồi kiểm phép chia bằng cách lấy mẫu nhân với thương và cộng phần dư.

Xem lời giải (trang 31).

Điểm dừng 01 – Sau khi làm xong

Bài/điều còn vướng	Phần cần ôn	Trở lại bài
Tập xác định và rút gọn	Giữ điều kiện xác định. Xem Tập xác định (trang 22).	Nhiệm vụ 01 của Khởi động (trang 4)
Đạo hàm hoặc xét dấu	Tính đạo hàm, xét dấu trên từng khoảng. Xem Đạo hàm và dấu (trang 22).	Nhiệm vụ 02 của Khởi động (trang 4)
Hướng giới hạn	Đọc đúng phía tiến tới. Xem Giới hạn và tiệm cận (trang 22).	Nhiệm vụ 03 của Khởi động (trang 4)
Phép chia đa thức	Kiểm thương và phần dư. Xem Thương và phần dư (trang 22).	Nhiệm vụ 04 của Khởi động (trang 4)

Nếu thao tác đã vững, vào mục đầu Bài học (trang 5) hoặc chọn hoạt động phù hợp; không phải đi qua mọi thẻ nền.

1. Từ dữ kiện đến sơ đồ khảo sát

Gợi mở 01 – Cùng đạo hàm, có cùng đồ thị?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Hai hàm số $u(x) = x^3 + x$ và $v(x) = x^3 + x + 2$ có cùng đạo hàm. Nếu biết dấu đạo hàm của chúng, em đã có thể vẽ chúng thành cùng một đồ thị chưa? Hãy so sánh tại $x = 0$.

Ta có $u(0) = 0$ và $v(0) = 2$. Dấu đạo hàm cho cùng chiều biến thiên nhưng chưa xác định vị trí đồ thị. Cần ghép thêm giá trị, giới hạn và các dữ kiện đặc trưng.

1.1. Phương pháp – Sơ đồ khảo sát

Một bản khảo sát gồm ba việc chính:

- **Tìm tập xác định.** Ghi rõ những điểm bị loại; những khoảng bị tách không được nối qua nhau.
- **Khảo sát sự biến thiên.** Tính đạo hàm. Trong tập xác định, tìm các điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại; xét dấu đạo hàm trên từng khoảng để kết luận chiều biến thiên và cực trị. Tiếp đó, tính các giới hạn cần thiết, xác định tiệm cận nếu có và lập bảng biến thiên.
- **Vẽ đồ thị dựa trên bảng biến thiên.** Bổ sung giao điểm với các trục hoặc điểm đặc trưng để tính; lưu ý tính đối xứng.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 26–27.

Trong bài này, các hàm số bậc ba và hai dạng hàm phân thức đang xét đều có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định. Với hàm phân thức, giá trị làm mẫu số bằng 0 không thuộc tập xác định: hàm số không có giá trị tại đó, nên đó không thể là điểm cực trị của hàm số. Ta vẫn xét giới hạn khi biến tiến gần giá trị bị loại để tìm tiệm cận đứng, nếu có.

Trong bảng biến thiên, cần phân biệt giá trị hàm số tại một điểm với giới hạn khi biến tiến gần điểm đó. Nếu một giá trị không thuộc tập xác định, không ghi giới hạn như thể đó là giá trị hàm số tại điểm bị loại. Khi tập xác định gồm hai khoảng rời nhau, lập bảng và vẽ riêng từng nhánh. Hình chỉ thể hiện một phần đồ thị; kết luận về giới hạn phải dựa vào phép tính hoặc dữ kiện đã cho.

1.2. Ví dụ 01 – Cùng dấu đạo hàm, khác vị trí

Với hai hàm ở Gợi mở, $u'(x) = v'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ trên $\mathbb{R}$. Cả hai đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị; cùng tiến tới $-\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$ và $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Nhưng $v(x) - u(x) = 2$ với mọi x : đồ thị thứ hai cao hơn đồ thị thứ nhất một khoảng theo phương thẳng đứng bằng 2 tại cùng hoành độ. Chỉ một bảng ghi dấu và chiều đi chưa quyết định được tung độ từng điểm.

Tự kiểm một hình vừa vẽ: điểm đã đánh dấu có thỏa công thức không; chiều đường cong có khớp dấu đạo hàm không; hướng gần tiệm cận có đúng giới hạn một phía không; có vô tình thêm một điểm bị loại không?

1.3. Nhiệm vụ 05 – Tìm mâu thuẫn trước khi nổi nét

Một bản khảo sát của $h(x) = x^3 + x - 1$ ghi: tập xác định $\mathbb{R}$; đạo hàm $3x^2 + 1 > 0$; đồng biến trên $\mathbb{R}$; đồ thị đi qua $O(0; 0)$. Chỉ ra phần sai, sửa lại và bổ sung hai giới hạn ở vô cực. Bản sửa đã cho phép kết luận có cực trị chưa?

Xem lời giải (trang 31). Nếu chưa biết kiểm tra một điểm có thuộc đồ thị hay không, thay hoành độ của điểm vào công thức rồi so sánh kết quả với tung độ đã cho; xem cách dùng giá trị hàm số ở Ví dụ 01 (trang 5).

2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Gợi mở 02 – Đổi dấu và đổi chiều

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu đạo hàm lần lượt mang dấu dương, âm, dương trên ba khoảng liên tiếp, đồ thị đổi chiều thế nào? Nếu đạo hàm chỉ bằng 0 tại một điểm nhưng dương ở cả hai phía, điều gì trong dự đoán ấy phải thay đổi?

Trường hợp dấu gọi hai lần đổi chiều; trường hợp sau không có sự đổi chiều tại mốc ấy. Để kết luận cực trị phải xét điểm thuộc tập xác định và dấu hai phía, không chỉ giải phương trình đạo hàm.

2.1. Những thông tin cần giữ

Với $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, tập xác định là $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Dấu của tam thức này quyết định chiều biến thiên. Khi có hai nghiệm phân biệt, xét đủ các khoảng; khi có nghiệm kép, kiểm việc đạo hàm không đổi dấu; khi không có nghiệm thực, dấu không đổi trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm bậc ba không có tiệm cận và có tâm đối xứng là điểm trên đồ thị có hoành độ $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Vì vậy phải lấy cả tung độ $f(x_0)$, không nhầm x_0 với một điểm. Quy tắc dấu và cực trị xem **Đơn điệu và cực trị**.

Nguồn đổi chiều: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 27.

2.2. Ví dụ 02 – Hai cực trị và một nghiệm kép của hàm

Khảo sát $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1),$$

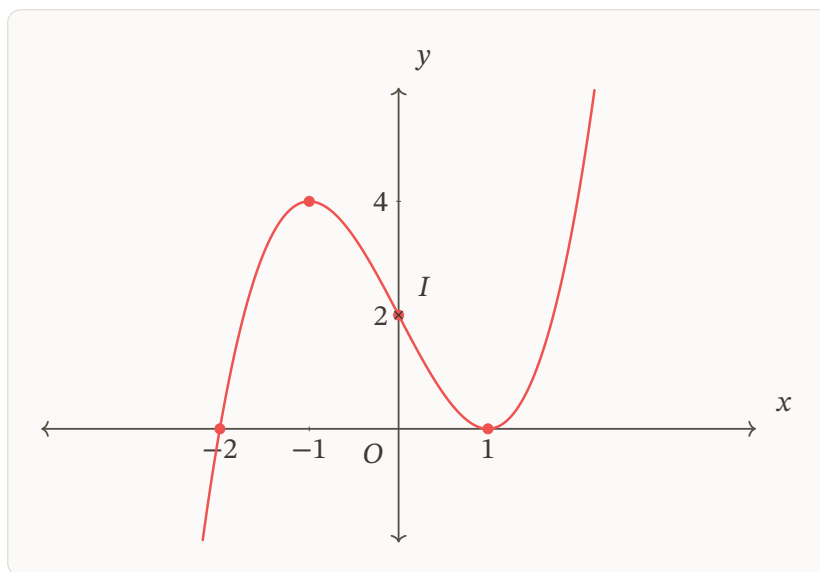
nên hàm đồng biến trên $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$. Hàm đạt cực đại tại $x = -1$ với giá trị 4, cực tiểu tại $x = 1$ với giá trị 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Vì $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, giao với trục hoành là $(-2; 0)$ và $(1; 0)$; giao với trục tung là $(0; 2)$. Tâm đối xứng là $I(0; 2)$. Đồ thị không có tiệm cận. Tại $(1; 0)$, đường cong chạm trục hoành rồi đi lên; tại $(-2; 0)$, nó đi qua trục hoành.



Hình 1

Hai giao điểm với trục hoành không phải hai điểm cực trị: phải đọc riêng nghiệm của hàm và nghiệm của đạo hàm.

2.3. Ví dụ 03 – Đạo hàm bằng không mà không có cực trị

Với $g(x) = x^3 + 1$, tập xác định là $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2, \quad g'(0) = 0.$$

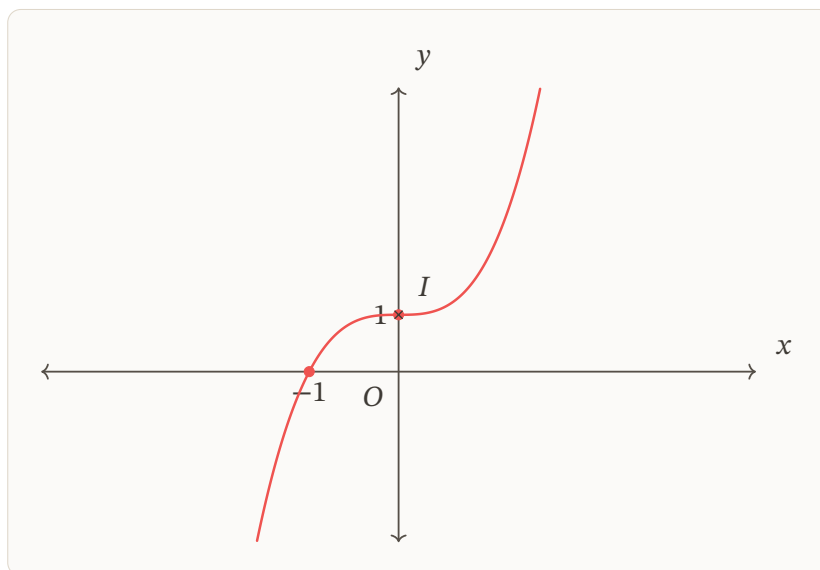
Đạo hàm dương ở cả hai phía của 0. Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị tại 0 hoặc nơi nào khác.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Các giao điểm với trục hoành và trục tung lần lượt là $(-1; 0)$ và $(0; 1)$; tâm đối xứng $I(0; 1)$; không có tiệm cận. Điểm có tiếp tuyến ngang vẫn nằm trên một đường cong tiếp tục đi lên qua điểm ấy.



Hình 2

Hàm $u(x) = x^3 + x$ ở Ví dụ 01 cũng không có cực trị, nhưng đạo hàm của nó không bằng 0 ở đâu. Hai trường hợp cùng không có cực trị cần được phân biệt.

2.4. Nhiệm vụ 06 – Một điểm dừng không đổi chiều

Với $p(x) = -(x - 1)^3 + 2$, tìm đạo hàm, lập bảng biến thiên, kết luận cực trị và xác định tâm đối xứng. Phác đồ thị bằng tâm và các điểm có hoành độ 0, 2; không cần viết chính xác giao điểm với trục hoành.

Xem lời giải (trang 31). Nếu còn nhầm đạo hàm bằng 0 với cực trị, xem lại Ví dụ 03 (trang 7).

3. Khảo sát hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất

Gợi mở 03 – Cùng tiệm cận, khác vị trí

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Hai đồ thị cùng có tiệm cận $x = 1$, $y = 2$ có nhất thiết cùng nằm về một phía của đường $y = 2$ khi $x > 1$ không? So sánh dấu của $\frac{3}{x-1}$ và $-\frac{3}{x-1}$ trên khoảng ấy.

Một phần dư dương cho nhánh bên phải nằm trên đường ngang; phần dư âm cho nhánh bên phải nằm dưới. Hai đường tiệm cận chưa cho biết toàn bộ vị trí và chiều đi của các nhánh.

3.1. Từ công thức đến hai nhánh

Với $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, điều kiện $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ bảo đảm đây không phải hàm hằng sau rút gọn. Ta xét mẫu khác 0, tính đạo hàm và các giới hạn. Không kết luận đơn điệu trên “toàn tập xác định” chỉ từ một dấu đạo hàm nếu tập xác định gồm hai khoảng rời.

Đồ thị nhận giao điểm hai tiệm cận làm tâm đối xứng; hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận là các trục đối xứng. Khi dùng hình để nhận đối xứng, hai trục tọa độ phải có cùng tỉ lệ độ dài.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 28–29.

3.2. Ví dụ 04 – Ghép biến thiên với tiệm cận ngang

Khảo sát

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0 \quad (x \neq 1).$$

Hàm nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty;$$

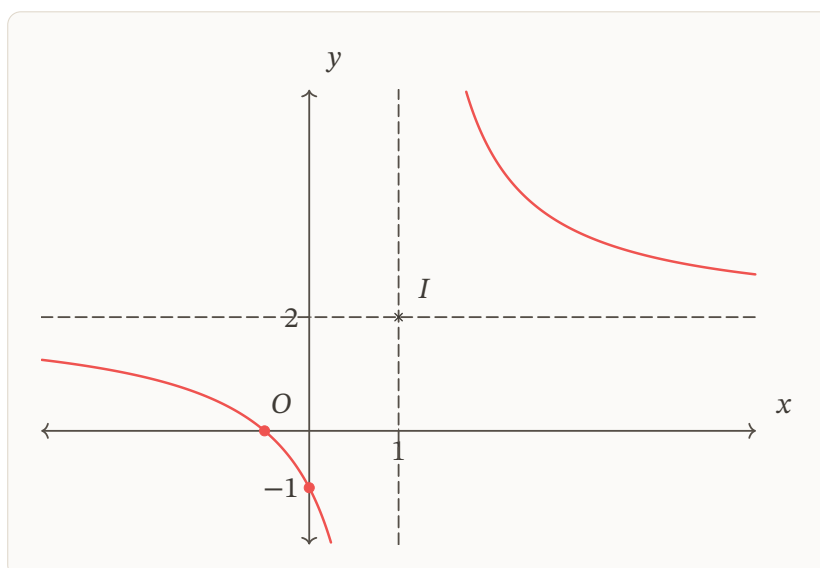
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Hai tiệm cận là $x = 1$, $y = 2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		–		–	
$f(x)$	2	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	2

Bảng biến thiên

Ở mốc $x = 1$, các kí hiệu $-\infty$ và $+\infty$ trong hàng $f(x)$ biểu thị giới hạn từ bên trái và bên phải; chúng không phải giá trị $f(1)$, vì 1 không thuộc tập xác định. Đồ thị đi qua $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(0; -1)$; có tâm $I(1; 2)$ và hai trục đối xứng $y - 2 = x - 1$, $y - 2 = -(x - 1)$. Với $x < 1$, đồ thị nằm dưới $y = 2$; với $x > 1$, nằm trên $y = 2$.



Hình 3

Không đặt một điểm đặc ở giao hai tiệm cận: tâm đối xứng không thuộc đồ thị này.

3.3. Nhiệm vụ 07 – Hai nhánh đồng biến

Khảo sát và vẽ đồ thị $g(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$. Ghi tập xác định, đạo hàm, khoảng đơn điệu, cực trị, bốn giới hạn cần thiết, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng. Vì sao không nối đường cong qua $x = -2$?

Xem lời giải (trang 32). Nếu chưa biết kết hợp chiều biến thiên và tiệm cận để vẽ hai nhánh, xem lại Ví dụ 04 (trang 9).

4. Khảo sát hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất

Gợi mở 04 – Phần dư và cực trị

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

So sánh hai hàm

$$u(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}, \quad v(x) = x + 1 - \frac{1}{x-1}.$$

Chúng cùng tiến gần đường thẳng nào khi $x \rightarrow +\infty$? Ở phía $x > 1$, hàm nào nằm trên đường ấy? Có thể từ đó kết luận chúng có cùng cực trị không?

Phần chênh lệch của cả hai với $x + 1$ tiến về 0, nhưng mang dấu trái nhau. Muốn biết cực trị phải tính đạo hàm; cùng tiệm cận không đủ.

4.1. Phần thương, phần dư và đối xứng

Sau phép chia, phân thức trong phạm vi bài có dạng “đa thức bậc nhất cộng phần dư trên mẫu bậc nhất”. Phần dư khác 0 là điều cần giữ theo điều kiện của họ hàm. Tìm tiệm cận xiên bằng giới hạn của **hiệu** giữa hàm số và đa thức thương, với biến tiến tới từng đầu vô cực.

Đồ thị nhận giao điểm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi các tiệm cận làm trục đối xứng. Không mặc định đường ngang hoặc đường thẳng vuông góc tiệm cận xiên là trục đối xứng.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 4, trang 30–32.

4.2. Ví dụ 05 – Tiệm cận xiên và hai cực trị

Khảo sát

$$u(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ta có

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Đạo hàm bằng 0 tại 0, 2. Hàm đồng biến trên $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(0; 1)$, $(1; 2)$. Cực đại tại $x = 0$, giá trị 0; cực tiểu tại $x = 2$, giá trị 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Đường $x = 1$ là tiệm cận đứng. Vì

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) - (x + 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) - (x + 1)] = 0,$$

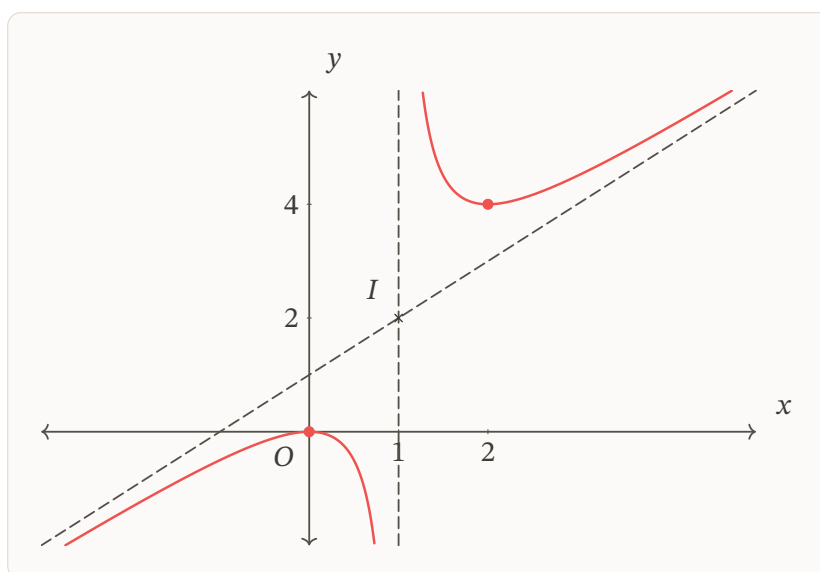
đường $y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm ở bên trong khoảng		+		-		-		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Giá trị $x = 1$ không thuộc tập xác định, nên hai nhánh được xét riêng trên các khoảng ở hai phía của 1. Hai nghiệm của phương trình $u'(x) = 0$ là $x = 0$ và $x = 2$.

Đồ thị giao cả hai trục tại $O(0; 0)$, tâm đối xứng $I(1; 2)$. Nhánh bên trái ở dưới đường xiên; nhánh bên phải ở trên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của $x = 1$ và $y = x + 1$, không phải chính hai tiệm cận.



Hình 4

Giá trị cực đại 0 nhỏ hơn giá trị cực tiểu 4 vẫn có thể xảy ra. Cực đại tại $x = 0$ chỉ được so sánh với giá trị của hàm số ở các điểm đủ gần 0; cực tiểu tại $x = 2$ chỉ được so sánh với giá trị ở các điểm đủ gần 2. Hai kết luận này không yêu cầu giá trị cực đại phải lớn hơn mọi giá trị cực tiểu.

4.3. Ví dụ 06 – Cùng tiệm cận, không có cực trị

Với

$$v(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1} = x + 1 - \frac{1}{x - 1},$$

tập xác định vẫn là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, nhưng

$$v'(x) = 1 + \frac{1}{(x - 1)^2} > 0.$$

Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, không có cực trị.

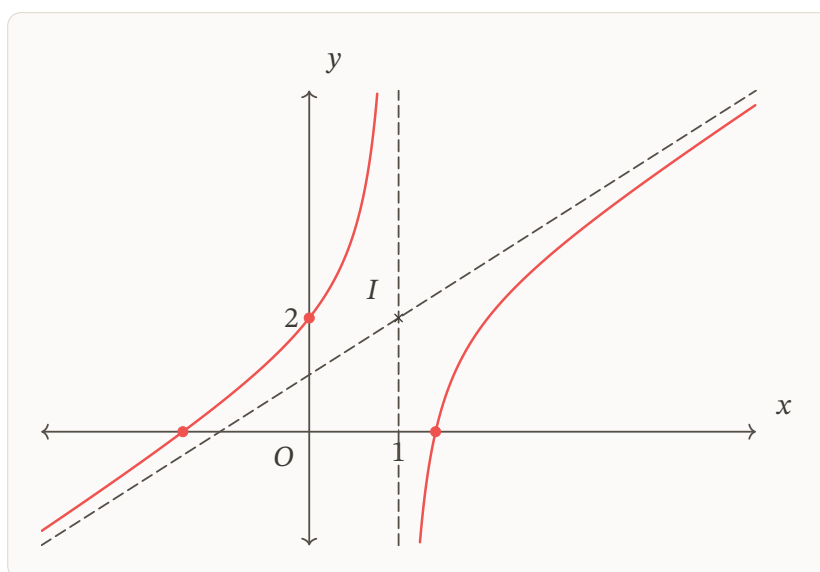
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} v(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} v(x) &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) &= +\infty; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x + 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x + 1)] = 0.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$v'(x)$		+		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận và tâm vẫn là $x = 1$, $y = x + 1$, $I(1; 2)$. Đồ thị giao với trục hoành tại $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 2)$. Nhánh trái nằm trên đường xiên, nhánh phải nằm dưới.



Hình 5

4.4. Nhiệm vụ 08 – Kiểm lại dấu của phần dư

Cho $h(x) = x - 1 - \frac{4}{x-2}$. Tìm tập xác định, đạo hàm, biến thiên, cực trị, tiệm cận và tâm đối xứng. Lập bảng biến thiên và phác hai nhánh; dùng điểm có hoành độ 0 để kiểm vị trí. Không cần giải chính xác giao với trục hoành.

Xem lời giải (trang 33). Nếu nhầm dấu đạo hàm hoặc vị trí hai nhánh so với tiệm cận xiên, xem lại Ví dụ 05 (trang 10) và Ví dụ 06 (trang 11).

5. Giải thích kết quả khảo sát trong bài toán thực tế

Gợi mở 05 – Điều kiện của mô hình và giá trị có thể đạt

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Một công thức chi phí trung bình có dạng $A(x) = 2 + \frac{12}{x}$, trong đó x là khối lượng sản phẩm, tính bằng tấn. Công thức có nghĩa toán học khi $x < 0$, nhưng phần đồ thị đó có mô tả sản lượng không? Nếu chỉ xét $1 \leq x \leq 6$, đường ngang $y = 2$ có cho biết giá trị nhỏ nhất trên đoạn này không?

Khối lượng không âm; bài toán còn giới hạn khối lượng được xét. Trên đoạn ấy, giá trị nhỏ nhất phải được tìm trong đoạn, không lấy một giới hạn ở vô cực.

5.1. Ba câu hỏi trước khi diễn giải

Đang xét tập nào? Giá trị nào được đạt trong tập đó? Kết luận đang nói về mô hình được cho hay về thực tế chưa được kiểm chứng?

Các bài dưới đây dùng mô hình chi phí giả định. Biến và đơn vị phải được giữ rõ trong mỗi kết luận; công thức chỉ được dùng trên tập đã cho.

5.2. Ví dụ 07 – Chi phí trung bình có cận nhưng không có giá trị nhỏ nhất

Giả sử tổng chi phí để sản xuất x tấn hàng là $C(x) = 2x + 12$ triệu đồng, mô hình áp dụng với $x \geq 1$. Chi phí trung bình mỗi tấn:

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = 2 + \frac{12}{x}$$

tính bằng triệu đồng mỗi tấn.

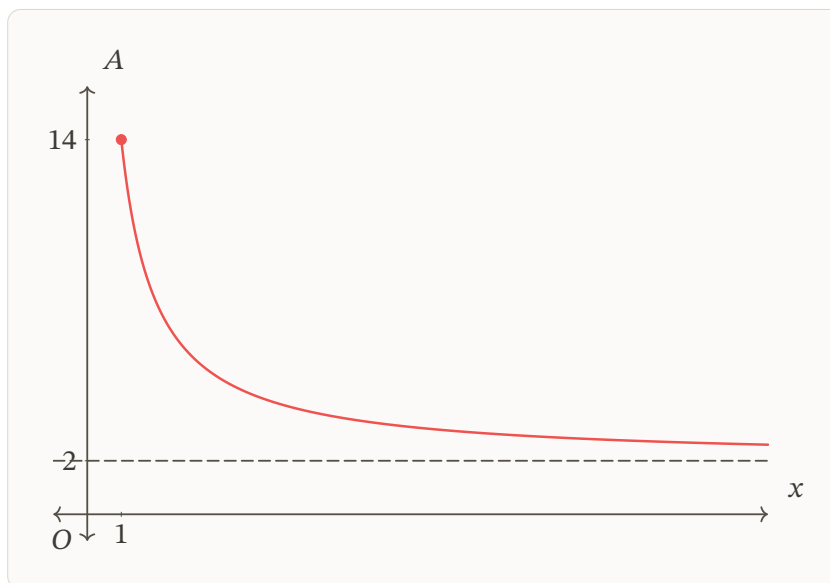
Ta có $A'(x) = -\frac{12}{x^2} < 0$, nên A giảm trên $[1; +\infty)$. Tại $x = 1$, ta được $A(1) = 14$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 2, \quad A(x) > 2 \quad (x \geq 1).$$

Giá trị lớn nhất là 14, đạt tại $x = 1$. Không có giá trị nhỏ nhất: với mỗi $x \geq 1$, chọn khối lượng lớn hơn thì chi phí trung bình nhỏ hơn; không khối lượng hữu hạn nào làm phần $\frac{12}{x}$ bằng 0.

x	1		$+\infty$
$A(x)$	14	$\searrow$	2

Bảng biến thiên



Hình 6

Đường $y = 2$ mô tả xu hướng khi $x \rightarrow +\infty$ trong mô hình. Đồ thị của hàm số với tập xác định $[1; +\infty)$ không có nhánh ứng với $x < 0$ hoặc tiệm cận đứng $x = 0$. Nếu chỉ tìm giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 6]$, ta được $A(6) = 4$, đạt khi sản xuất 6 tấn. Như vậy, cùng một công thức nhưng xét trên hai tập khác nhau có thể cho kết luận khác nhau về giá trị nhỏ nhất.

5.3. Nhiệm vụ 09 – Chi phí trên hai tập đang xét

Một mô hình cho $B(x) = 4 + \frac{18}{x}$ triệu đồng mỗi tấn, với $x \geq 2$. Tìm chiều biến thiên, giá trị lớn nhất và giải thích có hay không giá trị nhỏ nhất. Nếu chỉ xét $[2; 6]$, kết luận về giá trị nhỏ nhất thay đổi thế nào? Không dùng riêng hình vẽ để thay lập luận.

Xem lời giải (trang 34). Nếu nhầm cận dưới với giá trị nhỏ nhất, xem lại Ví dụ 07 (trang 13).

Khép lại bài học

Không nhìn lời giải, em hãy giải thích vì sao cần biết tập xác định trước khi xét biến thiên; vì sao đạo hàm bằng 0 chưa đủ kết luận cực trị; và vì sao cùng tiệm cận chưa quyết định cùng đồ thị. Chọn một hình của bài học, chỉ ra dữ kiện bảo đảm mỗi giao điểm, mốc cực trị và hướng nhánh.

Nếu còn vướng, xem đúng mục đó. Nếu đã nắm cách làm, vào Luyện tập (trang 15) hoặc chọn hoạt động phù hợp; làm được câu ngay sau ví dụ chưa xác nhận việc nhớ sau khoảng trễ.

Luyện tập

Tự làm trước khi mở lời giải; giữ riêng bài làm ban đầu và kết quả sau hỗ trợ. Chọn chặng theo việc còn cần luyện; phần chưa làm chưa có bằng chứng.

Chặng	Trọng tâm luyện tập	Nhiệm vụ và Điểm dừng
Bậc ba và phân thức bậc nhất (trang 15)	Khảo sát bậc ba và phân thức bậc nhất; kiểm dấu và hình vẽ	Nhiệm vụ 10 (trang 15)–12 (trang 15); Điểm dừng 02 (trang 16)
Phân thức bậc hai và mô hình (trang 16)	Ghép tiệm cận xiên với biến thiên, diễn giải đúng tập đang xét	Nhiệm vụ 13 (trang 16)–15 (trang 16); Điểm dừng 03 (trang 17)

Có thể chia Luyện tập thành nhiều buổi. Ghi rõ mức hỗ trợ với câu đã xem lời giải; không tính việc nhớ lại đáp án là bằng chứng mới. Khi vướng, dùng đường hỗ trợ phù hợp ở Điểm dừng rồi trở lại bài đang làm.

Chặng 1 – Bậc ba và phân thức bậc nhất

Mục tiêu: tự tổ chức bản khảo sát, kiểm cực trị qua dấu và vẽ đúng nhánh. Làm các nhiệm vụ dưới đây theo nhu cầu đã xác định; phần chưa làm chưa có bằng chứng.

Nhiệm vụ 10 – Khảo sát một hàm bậc ba

Khảo sát và vẽ đồ thị $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Ghi đủ tập xác định, đạo hàm/dấu, cực trị, giới hạn, bảng biến thiên, giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng. Kiểm việc đường cong đi qua hay chạm trục hoành tại các giao điểm.

Xem lời giải (trang 34).

Nhiệm vụ 11 – Không có cực trị theo hai cách

So sánh $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ với $q(x) = x^3 + 3x$. Tìm dấu đạo hàm và cực trị của mỗi hàm. Với p , tính tâm đối xứng và giải thích ý nghĩa của điểm có đạo hàm bằng 0. Không yêu cầu khảo sát đầy đủ hai đồ thị.

Xem lời giải (trang 35).

Nhiệm vụ 12 – Khảo sát phân thức với hai nhánh tăng

Khảo sát và vẽ đồ thị $f(x) = \frac{3x-8}{x-2}$. Nêu tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, các giới hạn, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ, tâm và các trục đối xứng.

Xem lời giải (trang 36).

Điểm dừng 02 – Đối chiếu chặng đầu

Việc cần xác nhận	Bài làm cần đối chiếu	Nếu chưa đúng
Tập xác định, dấu đạo hàm, cực trị, giới hạn, bảng và hình bậc ba khớp nhau	Nhiệm vụ 10 (trang 15)	Xem sơ đồ (trang 5), bậc ba (trang 6); Nhiệm vụ 23 của Sửa lỗi, ý b (trang 25)
Phân biệt điểm đạo hàm bằng 0 với điểm cực trị bằng dấu hai phía	Nhiệm vụ 11 (trang 15)	Xem bậc ba không có cực trị (trang 7); Nhiệm vụ 23 của Sửa lỗi, ý a (trang 25)
Giữ hai khoảng xác định; giới hạn, tiệm cận và hướng hai nhánh phân thức bậc nhất khớp nhau	Nhiệm vụ 12 (trang 15)	Xem phân thức bậc nhất (trang 8); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý a (trang 26)

Chỉ dùng ý sửa chưa gặp trước đó và đúng lỗi. Nếu đúng, giải thích được và hình khớp dữ kiện, ghi bằng chứng rồi chọn chặng tiếp hoặc hoạt động phù hợp. Nếu sai thao tác, mở Ôn nền (trang 22); nếu hết câu mới, ghi phần chưa xác nhận (trang 25). Sau hỗ trợ trở về Điểm dừng này; không phải làm lại mọi câu của chặng.

Chặng 2 – Tiệm cận xiên và điều kiện của mô hình

Mục tiêu: phân biệt hai trường hợp có cực trị và không có cực trị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất; giải thích kết quả của mô hình theo đúng điều kiện mà biến số được phép nhận.

Nhiệm vụ 13 – Khảo sát phân thức có tiệm cận xiên

Khảo sát và vẽ đồ thị $h(x) = \frac{x^2+2x+4}{x}$. Giải thích vì sao có thể có giá trị cực đại nhỏ hơn giá trị cực tiểu. Xác định tâm và mô tả hai trục đối xứng, không bắt buộc tìm phương trình các đường phân giác.

Xem lời giải (trang 37).

Nhiệm vụ 14 – Dấu trừ làm thay đổi hai nhánh

Khảo sát và vẽ đồ thị $v(x) = \frac{x^2-x-3}{x+1}$. Kiểm lại dấu đạo hàm bằng cách viết dưới dạng thương và phần dư; xác định giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng.

Xem lời giải (trang 38).

Nhiệm vụ 15 – Đồ thị chỉ trên khoảng sản lượng được phép

Một mô hình chi phí trung bình cho $A(x) = 3 + \frac{24}{x}$ triệu đồng mỗi tấn, với khối lượng $x \in [2; 8]$ tấn. Lập bảng biến thiên và vẽ phần đồ thị ứng với $x \in [2; 8]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và khối lượng để đạt từng giá trị ấy. Nhận xét câu “đường $y = 3$ là tiệm cận ngang nên chi phí nhỏ nhất bằng 3”.

Xem lời giải (trang 39).

Điểm dừng 03 – Đối chiếu khảo sát và diễn giải

Việc cần xác nhận	Bài làm cần đối chiếu	Nếu chưa đúng
Tiệm cận xiên, hai cực trị, giới hạn, bảng và hình khớp nhau	Nhiệm vụ 13 (trang 16)	Ví dụ có hai cực trị (trang 10); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý b (trang 26)
Giải thích không có cực trị bằng dấu đạo hàm; bảng và hình thể hiện đúng từng khoảng	Nhiệm vụ 14 (trang 16)	Ví dụ không cực trị (trang 11); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý c (trang 26)
Độc giá trị được đặt trên đoạn đang xét, có đơn vị	Nhiệm vụ 15 (trang 16)	Điều kiện của mô hình (trang 13); Nhiệm vụ 24 của Sửa lỗi, ý d (trang 26)

Nếu hình vẽ của trường hợp không có cực trị còn sai, dùng ý c chưa gặp trước đó và kiểm tra cả hình vẽ, không chỉ phép tính đạo hàm. Em có thể bắt đầu Kiểm tra khi đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin, hoặc quay lại đúng mục học nếu cần. Khi đánh giá kết quả, không dùng số câu đúng ở những phần khác để bỏ qua một nội dung còn vướng.

Kiểm tra

Chọn khi đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin. **Một lượt tự lực hoàn toàn**, không chia thành các đợt, không xem Bài học, gợi ý hoặc lời giải trong lượt. Thời lượng đề xuất cho bản này là 75 phút; đây là bài kiểm theo mục tiêu học liệu, không mô phỏng một đề thi tốt nghiệp.

Ghi thời điểm bắt đầu; làm trên giấy, ghi cả bảng và hình. Nếu cần hỗ trợ hoặc phải dừng, kết thúc lượt, ghi phần đã làm và thời lượng thực tế rồi mới mở hỗ trợ. Không nối phần làm sau hỗ trợ vào kết quả độc lập. Chưa dùng thang điểm cộng dồn; đối chiếu từng mục tiêu ở cuối lượt.

Nhiệm vụ 16 – Khảo sát hàm bậc ba

Khảo sát và vẽ đồ thị $f(x) = -x^3 + 3x^2$. Trình bày tập xác định, đạo hàm và dấu, cực trị, giới hạn, bảng biến thiên, giao điểm với các trục tọa độ, tâm đối xứng. Giải thích việc đồ thị đi qua hay chạm trục hoành.

Nhiệm vụ 17 – Khảo sát phân thức bậc nhất

Khảo sát và vẽ đồ thị $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$. Nêu tập xác định, đạo hàm, các giới hạn ở hai phía điểm loại và hai đầu vô cực, tiệm cận, bảng biến thiên, giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng.

Nhiệm vụ 18 – Khảo sát phân thức bậc hai

Khảo sát và vẽ đồ thị $h(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$. Nêu đầy đủ các dữ kiện của sơ đồ khảo sát; xác định tâm đối xứng và mô tả cách xác định các trục đối xứng, không cần tìm phương trình các trục ấy.

Nhiệm vụ 19 – Kết luận trong tập đang xét của mô hình

Một mô hình chi phí trung bình là $B(x) = 5 + \frac{18}{x}$ triệu đồng mỗi tấn, áp dụng với $3 \leq x \leq 9$ tấn. Tìm chiều biến thiên, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên tập đang xét này. Nhận xét lời giải “đường tiệm cận ngang là $y = 5$ nên chi phí trung bình nhỏ nhất là 5 triệu đồng mỗi tấn”. Có thể dùng bài toán này để kết luận chi phí ở sản lượng 20 tấn không?

Điểm dừng 04 – Kết thúc lượt và đối chiếu kết quả

Lưu bài ban đầu, đánh dấu chỗ chưa làm; sau đó mới Xem lời giải (trang 40).

Mục tiêu cần kiểm	Bài làm cần đối chiếu	Biểu hiện cần có
Tổ chức bản khảo sát	Nhiệm vụ 16 (trang 18), 17 (trang 18), 18 (trang 18)	Trình bày đủ các dữ kiện được yêu cầu; công thức, đạo hàm, biến thiên, giới hạn, bảng và hình phù hợp với nhau, giữ đúng tập xác định.
Khảo sát hàm số bậc ba	Nhiệm vụ 16 (trang 18)	Dùng dấu đạo hàm để kết luận biến thiên và cực trị; nối các mốc, giới hạn, giao điểm với hình; giải thích việc đi qua hay chạm trục hoành.
Khảo sát phân thức bậc nhất trên bậc nhất	Nhiệm vụ 17 (trang 18)	Giữ điểm loại và hai khoảng xác định; tìm đúng giới hạn, tiệm cận và giao điểm; bảng và hai nhánh đồ thị thể hiện đúng chiều biến thiên.

Mục tiêu cần kiểm	Bài làm cần đối chiếu	Biểu hiện cần có
Khảo sát phân thức bậc hai trên bậc nhất	Nhiệm vụ 18 (trang 18)	Nối phép chia với tiệm cận xiên; xét đúng dấu đạo hàm, cực trị và giới hạn trên từng khoảng; bảng và hình khớp các dữ kiện ấy.
Nhận biết đối xứng	Nhiệm vụ 16 (trang 18), 17 (trang 18), 18 (trang 18)	Xác định đúng tâm đối xứng. Với Nhiệm vụ 18, mô tả đúng cách xác định các trục đối xứng từ hai đường tiệm cận; không yêu cầu tìm phương trình các trục ấy.
Kiểm các biểu diễn và diễn giải mô hình	Nhiệm vụ 16 (trang 18)–18 (trang 18); Nhiệm vụ 19 (trang 18)	Đối chiếu công thức, bảng và hình; kết luận chiều biến thiên và các giá trị được đạt trong đúng tập đang xét, có đơn vị; bác việc lấy tiệm cận làm giá trị nhỏ nhất hoặc dùng mô hình ngoài điều kiện đã cho.

Sau khi kết thúc lượt, chọn hỗ trợ theo phần còn vướng:

- **Tổ chức và kiểm các biểu diễn:** Sơ đồ khảo sát (trang 5), rồi ý khảo sát đúng họ hàm ở Sửa lỗi.
- **Khảo sát bậc ba:** Nhiệm vụ 25 của Sửa lỗi, ý b (trang 26); ý a chỉ dùng nếu lỗi liên quan điểm đạo hàm bằng 0.
- **Phân thức bậc nhất:** Nhiệm vụ 26 của Sửa lỗi, ý a (trang 26).
- **Phân thức bậc hai và đối xứng:** Nhiệm vụ 26 của Sửa lỗi, ý b (trang 26).
- **Điều kiện của mô hình, giá trị đạt và đơn vị:** Nhiệm vụ 26 của Sửa lỗi, ý d (trang 26).

Với mỗi mục tiêu, ghi phần đã tự làm đúng, lỗi cụ thể còn mắc, phần chưa có bài làm để đối chiếu hoặc phần đã dùng trợ giúp. Bài Kiểm tra này chưa hỏi riêng hai trường hợp: hàm bậc ba không có cực trị và hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất không có cực trị. Để nhận xét hai trường hợp ấy, xem thêm bài tự làm tương ứng trong Bài học hoặc Luyện tập; không suy rằng vẽ đúng các đồ thị trong bài Kiểm tra là đã làm đúng mọi trường hợp.

Nếu lỗi thiết yếu đã được xác nhận đúng bằng câu phù hợp chưa gặp trước đó, ghi phần sửa riêng. Nếu chưa có bằng chứng phù hợp, giữ mục tiêu chưa xác nhận. Khi đủ điều kiện hoàn tất lượt chính, ghi ngày gốc và hẹn Ôn lại (trang 20); không bắt chờ hết các lượt ôn mới được học nội dung tiếp theo đủ tiên quyết.

Ôn lại

Ghi ngày hẹn cụ thể tính từ ngày hoàn tất lượt chính. Các mốc dưới đây là lịch đề xuất; ghi khoảng trễ thực tế nếu đổi lịch. Trước mỗi lượt, chưa đọc lại Bài học và chưa xem đề của lượt sau. Sau khi tự làm mới đổi chiều. Câu đã xem hoặc đã dùng để sửa trước đó không còn đo được khả năng nhớ độc lập như dự định.

Thời điểm ôn	Nhiệm vụ cần tự làm	Điểm dừng
Sau khoảng 2–3 ngày	Nhiệm vụ 20 (trang 20)	Điểm dừng 05 (trang 20)
Sau khoảng 7 ngày	Nhiệm vụ 21 (trang 20)	Điểm dừng 06 (trang 21)
Sau khoảng 3–4 tuần	Nhiệm vụ 22 (trang 21)	Điểm dừng 07 (trang 21)

Lượt 1 – Sau khoảng 2–3 ngày

Nhiệm vụ 20 – Nhớ lại khảo sát bậc ba

Không xem Bài học, lập bảng biến thiên và phác đồ thị $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Ghi tập xác định, đạo hàm/dấu, cực trị, giới hạn, giao điểm với các trục tọa độ và tâm đối xứng. Dùng bảng kiểm khảo sát do em tự nhớ trước khi mở lời giải.

Xem lời giải (trang 43).

Điểm dừng 05

Tự nhớ đủ quy trình, tính đúng và hình khớp thì ghi bằng chứng bậc ba sau khoảng trễ này. Nếu lỗi, xem mục bậc ba (trang 6), chọn Nhiệm vụ 27 của Sửa lỗi, ý b (trang 27) chưa gặp trước đó. Ý a xác nhận riêng trường hợp không có cực trị. Sau sửa quay về đây; không ghi đạt hai họ phân thức từ lượt này.

Lượt 2 – Sau khoảng 7 ngày

Nhiệm vụ 21 – Nhớ lại phân thức và điều kiện của mô hình

- Khảo sát và phác đồ thị $f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}$; trình bày tập xác định, đạo hàm, biến thiên, giới hạn, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ và tâm.
- Mô hình $A(x) = 2 + \frac{30}{x}$ triệu đồng mỗi tấn áp dụng trên $3 \leq x \leq 15$ tấn. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và giải thích vì sao không lấy 2 làm giá trị nhỏ nhất.

Xem lời giải (trang 44).

Điểm dừng 06

Nếu ý a còn sai, xem lại phân thức bậc nhất (trang 8), rồi tự làm Nhiệm vụ 28 của Sửa lỗi, ý a (trang 27) nếu chưa gặp trước đó. Nếu ý b còn sai, xem lại cách giải thích kết quả trong mô hình (trang 13), rồi dùng ý d của nhiệm vụ ấy. Sau đó quay lại Điểm dừng này, ghi kết quả từng ý và trợ giúp đã dùng. Việc sửa đúng ngay sau khi xem lời giải chưa cho biết em còn nhớ cách làm sau một thời gian.

Lượt 3 – Sau khoảng 3–4 tuần

Nhiệm vụ 22 – Nhớ lại tiệm cận xiên và cực trị

Khảo sát và phác đồ thị $h(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$. Ghi tập xác định, đạo hàm/dấu, cực trị, các giới hạn cần thiết, tiệm cận, bảng biến thiên, giao điểm với các trục tọa độ và tâm. Mô tả cách xác định trục đối xứng; không cần viết phương trình các trục.

Xem lời giải (trang 45).

Điểm dừng 07

Nếu còn lỗi, xem phân thức bậc hai (trang 10), rồi tự làm Nhiệm vụ 28 của Sửa lỗi, ý b (trang 27) nếu chưa gặp trước đó. Ý c kiểm tra trường hợp không có cực trị, không thay cho trường hợp có cực trị ở ý b. Sau khi sửa, quay lại Điểm dừng này và ghi phần em tự làm được, phần đã dùng hỗ trợ. Lượt ôn này kiểm tra cách khảo sát hàm phân thức bậc hai có cực trị; làm đúng bài này chưa cho biết kết quả ở mọi dạng hàm khác. Nếu vừa xem lời giải rồi làm lại, chưa thể dựa vào lần đó để kết luận mình còn nhớ sau một thời gian.

Ôn nền

Chọn đúng thao tác đang vướng và ghi nhớ nhiệm vụ đã gọi. Các liên kết dưới mở phần nền đã có trong học liệu liên quan; không cần học lại cả học liệu. Làm câu tự kiểm ở đó chỉ khi chưa gặp trước đó; câu từng gặp không trở thành mới do được dẫn lại.

Tập xác định và điểm bị loại

Mở **Tập xác định và khoảng xét**. Giữ điều kiện của hàm số ban đầu khi rút gọn. Sau khi ôn, quay về Nhiệm vụ 01 của Khởi động (trang 4) nếu em mở thẻ từ đó; nếu đang làm một bài khảo sát khác, trở lại bước tìm tập xác định của bài ấy. Làm đúng câu ôn nền chỉ cho biết em đã làm được thao tác đó, chưa thay cho việc hoàn thành bài khảo sát.

Đạo hàm và xét dấu

Mở **Đạo hàm đa thức** khi sai đạo hàm đa thức; mở **Xét dấu biểu thức có nhân tử** khi sai dấu. Hai thẻ này không dạy đầy đủ đạo hàm phân thức: với lỗi đó xem phép tính ở Ví dụ 04 (trang 9), Ví dụ 05 (trang 10), rồi tự làm đúng ý phân thức trong nhóm Sửa lỗi thuộc nơi phát hiện. Trở về Khởi động — Đạo hàm và dấu (trang 4) hoặc bước đạo hàm của bài gốc. Xét đúng dấu chưa tự xác nhận việc gọi tên cực trị, tiệm cận hoặc vẽ hình.

Giới hạn và giá trị được đạt

Mở **Giới hạn một phía** khi nhầm hướng/dấu; **Giới hạn ở vô cực** khi bỏ một dấu hoặc thay vô cực như một số; **Cận và giá trị được đạt** khi nhầm cận với giá trị nhỏ nhất. Chỉ dùng phần phù hợp với phân thức đang học, không cần làm nhánh căn của thẻ giới hạn ở vô cực. Trở về Khởi động — Giới hạn có hướng (trang 4) hoặc bài đang làm trước khi mở hỗ trợ; nếu vướng mô hình, trở về mục đọc đúng tập đang xét (trang 13).

Biến đổi phân thức

Mở **Biến đổi phân thức: giữ điều kiện, kiểm thương và dư**. Ví dụ của thẻ cũng xuất hiện trong Khởi động để nối nền đã học; nếu đã xem, dùng nó để nhớ thao tác, không nhận là bằng chứng tự lực mới. Sau tự kiểm nền chưa gặp trước đó, quay về Khởi động — Thương và phần dư (trang 4) hoặc bước chia của bài gốc. Cần kiểm giới hạn phần dư khi kết luận tiệm cận. Khi mở thẻ ở học liệu khác, dùng liên kết “Quay lại” phía trên nội dung để về đúng nhiệm vụ hoặc thẻ nền đã gọi. Nếu liên kết này không hiện, dùng nút Quay lại của trình duyệt hoặc tab đang đọc, rồi về nhiệm vụ đã gọi ở trên.

Sửa lỗi

Dùng sau khi đã tự làm và biết điều cần sửa; riêng Kiểm tra phải kết thúc lượt trước. Không cần làm tất cả các câu ở đây. Chọn theo **nơi phát hiện và mục tiêu thực sự sai**, xem lại đúng phần rồi tự làm ý phù hợp chưa gặp trước đó. Giữ bài ban đầu và ghi mức hỗ trợ.

Chọn đúng ý và nơi quay về

Mỗi dòng dưới đây chỉ ra một điều cần phân biệt để hiểu bài vững hơn. Đối chiếu với bài làm của em, thử trả lời câu hỏi rồi xem lại phần học được dẫn khi cần. Chọn đúng bài và đúng ý theo nơi phát hiện; nếu đang học Bài học, có thể dùng nhóm Sau Luyện tập. Chỉ tự kiểm tra bằng bài phù hợp chưa gặp trước đó; trong lượt Kiểm tra phải kết thúc lượt trước khi dùng hỗ trợ.

Nút thất nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Công thức và tập xác định	Thêm điểm sau rút gọn hoặc vẽ đường nối qua giá trị làm mẫu bằng 0.	Hàm số có giá trị tại điểm đó không? Giữ điểm bị loại trong bảng và hình; xét riêng các nhánh của tập xác định. Xem lại kiến thức (trang 5).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý a (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý a (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý a (trang 27). Các ý này kiểm điểm bị loại của phân thức; chưa có bài Sửa lỗi riêng về mất điểm sau rút gọn.
Đạo hàm và dấu của đạo hàm	Sai dấu khi đạo hàm phần phân thức, kéo theo bảng và hình sai.	Phép đạo hàm và dấu trên từng khoảng đã được kiểm riêng chưa? Giữ dấu của phần dư; tính lại đạo hàm trước khi kết luận biến thiên. Xem lại kiến thức (trang 11).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý b và c (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý b và c (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý b và c (trang 27).
Đạo hàm bằng không và sự đổi chiều	Coi mọi nghiệm của đạo hàm là điểm cực trị.	Dấu hai phía có thay đổi không? Phân biệt nghiệm kép của đạo hàm với hai nghiệm phân biệt; nêu lí do có hoặc không có cực trị. Xem lại kiến thức (trang 7).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 23, ý a (trang 25). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 25, ý a (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 27, ý a (trang 27).
Nghiệm của hàm số và nghiệm của đạo hàm	Dùng giao điểm với trục hoành để đếm cực trị hoặc nhầm chạm trục với cắt trục.	Đang giải $f(x) = 0$ hay $f'(x) = 0$? Tìm giao điểm và xét cực trị riêng; đối chiếu dấu, chiều biến thiên tại từng điểm. Xem lại kiến thức (trang 6).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 23, ý b (trang 25). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 25, ý b (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 27, ý b (trang 27).
Chiều biến thiên và vị trí đồ thị	Coi cùng đạo hàm hoặc cùng bảng dấu là cùng một đồ thị.	Các điểm đã vẽ có thỏa công thức không? Tính thêm giá trị và giao điểm cần thiết; dùng chiều biến thiên để kiểm nét nối, không để thay tung độ. Xem lại kiến thức (trang 5).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 23, ý b (trang 25). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 25, ý b (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 27, ý b (trang 27).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Đồng biến trên từng nhánh và trên toàn tập	Gộp hai khoảng qua điểm bị loại thành một khoảng đồng biến.	Tập xác định có bị tách tại điểm đó không? Phát biểu chiều biến thiên trên từng khoảng hợp lệ và vẽ riêng hai nhánh. Xem lại kiến thức (trang 8).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý a (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý a (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý a (trang 27).
Giới hạn, giá trị tại điểm và bảng biến thiên	Ghi giới hạn ở điểm bị loại như giá trị hàm số, hoặc bỏ một hướng tiến.	Ô đang ghi là giá trị hay giới hạn theo phía nào? Tách rõ điểm bị loại, giới hạn một phía và hai đầu vô cực; kiểm mỗi mũi tên theo dấu đạo hàm. Xem lại kiến thức (trang 5).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý b và c (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý b và c (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý b và c (trang 27).
Phép chia và tiệm cận xiên	Bỏ phần dư hoặc hằng số của thương, rồi nhận sai đường xiên.	Nhân mẫu với thương rồi cộng phần dư có trả lại tử ban đầu không? Kiểm phép chia và giới hạn của hiệu với đường thẳng dự kiến ở từng đầu vô cực. Xem lại kiến thức (trang 10).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý b và c (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý b và c (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý b và c (trang 27).
Cùng tiệm cận và khác đáng điệu	Từ cùng tiệm cận suy ra cùng vị trí nhánh hoặc cùng số cực trị.	Dấu của phần dư và dấu đạo hàm khác nhau thế nào? So sánh hai trường hợp bằng phép tính; kiểm nhánh nằm trên hay dưới đường xiên và có đổi chiều hay không. Xem lại kiến thức (trang 10).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý b và c (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý b và c (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý b và c (trang 27).
Cực đại và cực tiểu ở hai lân cận	Cho rằng giá trị cực đại luôn phải lớn hơn mọi giá trị cực tiểu.	Mỗi kết luận cực trị đang so sánh trong lân cận nào? Giữ nghĩa cực bộ; không dùng thứ tự hai giá trị ở hai nhánh để bác kết quả cực trị. Xem lại kiến thức (trang 10).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý b (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý b (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý b (trang 27).
Tâm đối xứng và một hoành độ	Ghi hoành độ của tâm như thể đó đã là một điểm.	Tung độ của tâm được xác định thế nào? Với hàm bậc ba, lấy đủ tọa độ điểm trên đồ thị; với phân thức, xác định giao điểm hai tiệm cận. Xem lại kiến thức (trang 6).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 23, ý b (trang 25). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 25, ý b (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 27, ý b (trang 27). Với tâm của phân thức, chọn ý a, b hoặc c tương ứng trong nhóm phân thức cùng giai đoạn.
Tâm, tiệm cận và trục đối xứng	Lấy chính tiệm cận hoặc một đường ngang qua tâm làm trục đối xứng.	Các trục đối xứng liên hệ thế nào với góc tạo bởi hai tiệm cận? Đối chiếu hai đường phân giác theo phần học; không suy từ vẽ cân đối của hình vẽ. Xem lại kiến thức (trang 10).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý a, b và c (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý a, b và c (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý a, b và c (trang 27).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Tập xác định của biểu thức và điều kiện mô hình	Vẽ cả nhánh không ứng với sản lượng được phép hoặc kết luận ngoài phạm vi mô hình.	Biến và đơn vị đang chỉ đại lượng nào, được nhận những giá trị nào? Giữ điều kiện đề bài trong bảng, hình và kết luận; không mở rộng mô hình chỉ vì biểu thức còn tính được. Xem lại kiến thức (trang 13).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý d (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý d (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý d (trang 27).
Cận ở vô cực và giá trị nhỏ nhất trên đoạn	Lấy tiệm cận ngang làm giá trị nhỏ nhất hoặc giữ kết luận cũ khi đổi tập đang xét.	Mức ấy có được đạt trong tập hiện tại không? Xét sự đạt được và dấu nút; trên đoạn hữu hạn phải so sánh các giá trị thuộc đoạn ấy. Xem lại kiến thức (trang 13).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 24, ý d (trang 26). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 26, ý d (trang 26). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 28, ý d (trang 27).

Các ý a, b, c của nhóm phân thức kiểm các trường hợp khác nhau; mỗi ý có bảng và hình để đối chiếu. Đúng một ý không tự xác nhận ý còn lại. Chỉ chọn ý khớp lỗi và chưa gặp trước đó.

Khi câu phù hợp đã gặp trước đó hoặc vẫn chưa đúng

Bài đã gặp trước đây vẫn có thể dùng để ôn cách làm, nhưng không được coi là một bài mới để tự kiểm tra. Nếu đã biết lời giải hoặc đã làm bài với trợ giúp, hãy ghi rõ điều đó; không tính lần làm lại là kết quả tự giải một bài mới. Không làm trước bài Kiểm tra, bài của lượt Ôn lại sau hoặc bài Sửa lỗi dành cho phần học khác chỉ để thay một bài đã gặp. Khi không còn bài phù hợp để kiểm tra thêm, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này”, xem lại phần đang vướng và tiếp tục nội dung khác mà em đã đủ kiến thức.

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 23 – Bạc ba

- Khảo sát và phác đồ thị $p(x) = -(x + 2)^3 + 5$ theo đủ sơ đồ. Đặc biệt giải thích vì sao điểm có đạo hàm bằng 0 không là cực trị. So sánh thêm với $q(x) = x^3 + 2x$: vì sao q cũng không có cực trị nhưng không có điểm đạo hàm bằng 0? Không cần khảo sát đầy đủ q .
- Khảo sát và phác đồ thị $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$: tập xác định, đạo hàm/dấu, cực trị, giới hạn, bảng biến thiên, giao điểm với các trục tọa độ và tâm.

Xem lời giải (trang 46).

Nhiệm vụ 24 – Phân thức và bài toán thực tế

- a) Khảo sát và vẽ $f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$ theo đủ sơ đồ: tập xác định, đạo hàm, giới hạn, biến thiên, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ, tâm và các trục đối xứng.
- b) Khảo sát và vẽ $h(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$ theo đủ sơ đồ; mô tả các trục đối xứng.
- c) Khảo sát và vẽ $v(x) = x + 3 - \frac{1}{x+1}$ theo đủ sơ đồ; mô tả các trục đối xứng.
- d) Mô hình $A(x) = 1 + \frac{20}{x}$ triệu đồng mỗi tấn áp dụng với $x \geq 2$ tấn. Tìm giá trị lớn nhất, giải thích có hay không giá trị nhỏ nhất. Xét lại nếu tập đang xét là $[2; 10]$.

Xem lời giải (trang 48).

Sau đối chiếu: ghi đúng ý đã xác nhận, trở về Nhiệm vụ 05 (trang 6), 06 (trang 8), 07 (trang 10), 08 (trang 12), 09 (trang 14), hoặc Điểm dừng 02 (trang 16), Điểm dừng 03 (trang 17) đã gọi. Không tự chọn một nơi khác để bỏ qua tiêu chí còn thiếu.

Sau Kiểm tra**Nhiệm vụ 25 – Bậc ba**

- a) Khảo sát và phác đồ thị $p(x) = -(x-2)^3 + 3$ theo đủ sơ đồ. Đặc biệt giải thích vì sao điểm có đạo hàm bằng 0 không là cực trị.
- b) Khảo sát và phác đồ thị $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ theo đủ sơ đồ. Dùng ý b để xác nhận lỗi ở bài khảo sát bậc ba; ý a kiểm riêng trường hợp không có cực trị.

Xem lời giải (trang 51).

Nhiệm vụ 26 – Phân thức và bài toán thực tế

- a) Khảo sát và vẽ $f(x) = 3 + \frac{3}{x-1}$ theo đủ sơ đồ: tập xác định, đạo hàm, giới hạn, biến thiên, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ, tâm và các trục đối xứng.
- b) Khảo sát và vẽ $h(x) = x + 2 + \frac{4}{x+2}$ theo đủ sơ đồ; mô tả các trục đối xứng.
- c) Khảo sát và vẽ $v(x) = x + 2 - \frac{4}{x+2}$ theo đủ sơ đồ; mô tả các trục đối xứng.
- d) Mô hình $A(x) = 4 + \frac{24}{x}$ triệu đồng mỗi tấn áp dụng với $x \geq 3$ tấn. Xét giá trị lớn nhất, có hay không giá trị nhỏ nhất; rồi xét lại trên $[3; 12]$.

Xem lời giải (trang 53).

Sau đối chiếu: trở về kết quả Kiểm tra (trang 18), giữ bài gốc và ghi bằng chứng sửa tách biệt. Chỉ ý phù hợp được xác nhận, không đổi cả kết quả lượt thành “tự lực”.

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 27 – Bậc ba

- a) Khảo sát và phác đồ thị $p(x) = (x - 1)^3 - 2$ theo đủ sơ đồ. Đặc biệt giải thích vì sao điểm có đạo hàm bằng 0 không là cực trị.
- b) Khảo sát và phác đồ thị $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ theo đủ sơ đồ. Dùng đúng ý chưa gặp trước đó theo trường hợp cần xác nhận sau khoảng trễ.

Xem lời giải (trang 56).

Nhiệm vụ 28 – Phân thức và bài toán thực tế

- a) Khảo sát và vẽ $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ theo đủ sơ đồ: tập xác định, đạo hàm, giới hạn, biến thiên, tiệm cận, giao điểm với các trục tọa độ, tâm và các trục đối xứng.
- b) Khảo sát và vẽ $h(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ theo đủ sơ đồ; mô tả các trục đối xứng.
- c) Khảo sát và vẽ $v(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$ theo đủ sơ đồ; mô tả các trục đối xứng.
- d) Mô hình $A(x) = 2 + \frac{36}{x}$ triệu đồng mỗi tấn áp dụng với $x \geq 3$ tấn. Xét giá trị lớn nhất, có hay không giá trị nhỏ nhất; rồi xét lại trên $[3; 9]$.

Xem lời giải (trang 58).

Sau đối chiếu: trở về Điểm dừng 05 (trang 20), Điểm dừng 06 (trang 21) hoặc Điểm dừng 07 (trang 21) đã gọi. Ghi khoảng trễ thực tế và phần hỗ trợ; nếu tái lỗi, hẹn kiểm riêng lỗi ấy ở buổi sau, không ghi nhớ bên chỉ vì vừa sửa đúng.

Nhật kí

Dùng khi cần lưu kết quả, lỗi, mức hỗ trợ, lịch hẹn hoặc điểm tiếp tục; không bắt ghi sau từng câu. Mẫu dưới giữ đúng các trường của **Nhật kí học tập dùng chung**. Sao chép ra giấy hoặc công cụ ghi chú và tự điền; không có trạng thái đạt điểm sẵn.

Sao chép mẫu trống này ra giấy hoặc công cụ ghi chú. Không có ô nào được điền sẵn “đã đạt”.

Trường	Em ghi
Ngày–giờ	...
Gói / mục tiêu	...
Nguồn phát hiện	...
Bài làm ban đầu	...
Mức hỗ trợ ban đầu	...
Bảng chứng quan sát	...
Phân loại	...
Mã lỗi hoặc mã Nền	...
Hành động	...
Bài khắc phục mới	...
Trạng thái sau sửa	...
Hẹn Ôn lại	...
Kết quả sau khoảng trễ	...
Quyết định tiếp theo	...

Ví dụ giả lập — không phải kết quả thật của một học sinh. Ví dụ dùng một bài của Đơn điệu và cực trị để minh họa cách ghi; khi dùng mẫu ở gói khác, ghi đúng bài của gói đang học, không phải làm thêm bài trong ví dụ này.

Trường	Ví dụ ghi
Ngày–giờ	10/10/2026, 19:40
Gói / mục tiêu	Đơn điệu và cực trị / xét dấu hai phía để kết luận cực trị
Nguồn phát hiện	Điểm dừng 01, nhiệm vụ 13 của Luyện tập
Bài làm ban đầu	Kết luận “g có cực trị tại -1 vì $g'(-1) = 0$ ”
Mức hỗ trợ ban đầu	Tự làm, chưa xem lời giải
Bảng chứng quan sát	Đã có $g'(x) = -(x+1)^2$ nhưng bỏ qua dấu âm ở cả hai phía của -1
Phân loại	Lỗi mục tiêu
Mã lỗi hoặc mã Nền	Coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị
Hành động	Xem lại trường hợp đạo hàm không đổi dấu; sửa kết luận và nêu dấu hai phía
Bài khắc phục mới	Nhiệm vụ 38 của Sửa lỗi sau Luyện tập, chưa xem đề/đáp án trước đó; tự làm từ $b'(x) = -(x-1)^4$, kết luận nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị tại 1, giải thích bằng dấu
Trạng thái sau sửa	Đã xác nhận đúng lỗi này trong lượt; chưa chứng nhận cả chặng hoặc độ bền

Trường	Ví dụ ghi
Hẹn Ôn lại	Chưa hẹn ba lượt toàn gói vì chưa hoàn tất lượt chính; kiểm riêng lỗi này ở buổi học kế tiếp
Kết quả sau khoảng trễ	Chưa kiểm; chỉ ghi kết quả khi thực sự tự làm sau khoảng trễ
Quyết định tiếp theo	Quay về Điểm dừng 01, kiểm các tiêu chí còn lại trước khi sang chặng 2

Nếu bài khắc phục còn sai, xem lại đúng phần nền hoặc mục học theo nguyên nhân; chưa đánh dấu lỗi đã sửa. Nếu tự làm bài phù hợp chưa gặp trước đó và giải thích đúng, ghi “đã xác nhận lỗi này trong lượt” rồi quay về nơi đã gọi hỗ trợ. Không coi kết quả của một bài là chứng nhận cả chặng hoặc cả gói. Nếu không còn bài xác nhận phù hợp chưa gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận. Hẹn các lượt Ôn lại toàn gói từ ngày hoàn tất lượt chính; lần kiểm riêng một lỗi vừa sửa được ghi riêng. Chỉ ghi độ bền khi có kết quả thực tế sau khoảng trễ.

Ghi tên nội dung và lỗi bằng lời có nghĩa; chỉ ghi mã lỗi/Nền khi hệ đang dùng có mã phù hợp. “Đã xác nhận lỗi này trong lượt” khác với “nhớ sau khoảng trễ”. Nếu câu đã gặp trước đó hoặc chưa có câu xác nhận phù hợp, ghi rõ; đừng đổi thành đạt chỉ vì đã sửa bài gốc.

Lời giải

Mở sau khi đã tự làm. Mỗi lời giải có đường trở về đúng đề; phần quyết định tiếp tục nằm ở Điểm dừng tương ứng. Chỉ mở lời giải của nhiệm vụ cần đối chiếu; giữ lại bài tự làm để nhận ra bước đúng và bước cần sửa.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 – Tập xác định trước và sau rút gọn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Trên tập xác định ấy, $r(x) = x + 3$. Điểm $(3; 6)$ không thuộc đồ thị vì công thức ban đầu không xác định tại 3. Tiêu chí: giữ điều kiện trong cả phép biến đổi và hình; không coi rút gọn là quyền mở rộng tập xác định.

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ 02 – Đạo hàm và dấu

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$p'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$. Dấu lần lượt là $+$, $-$, $+$ trên $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$. Cực đại tại $x = -2$, cực tiểu tại $x = 2$. Trước kết luận, kiểm tra giá trị đang xét có thuộc tập xác định hay không và đạo hàm đổi dấu qua điểm ấy. Nếu chỉ tìm được hai nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 mà chưa xét dấu, kết luận chưa đủ căn cứ.

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ 03 – Giới hạn có hướng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Khi $x \rightarrow -2^-$, mẫu âm và tiến tới 0, nên $q(x) \rightarrow -\infty$. Khi $x \rightarrow -2^+$, mẫu dương và tiến tới 0, nên $q(x) \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 1.$$

Hai đường tiệm cận là $x = -2$, $y = 1$. Tiêu chí: đủ bốn hướng, phân biệt phương trình đường thẳng với giá trị giới hạn.

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ 04 – Thương và phần dư**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Với $x \neq -1$,

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} = x + 1 + \frac{4}{x + 1},$$

vì $(x + 1)(x + 1) + 4 = x^2 + 2x + 5$. Bài làm cần có phần dư 4, giữ mẫu số và điều kiện xác định. Khi lấy mẫu nhân với thương rồi cộng phần dư, kết quả phải đúng bằng tử số ban đầu.

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ trong Bài học**Nhiệm vụ 05 – Tìm mâu thuẫn trước khi nổi nét****Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

$h(0) = -1$, nên đồ thị đi qua $(0; -1)$, không qua O . Các kết quả về tập xác định, đạo hàm và đồng biến đã đúng.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Hàm không có cực trị vì đạo hàm dương trên $\mathbb{R}$. Tiêu chí: chỉ sửa phần sai, giữ phần đúng và nêu lí do không có cực trị.

Xem đề bài (trang 6).

Nhiệm vụ 06 – Một điểm dừng không đổi chiều**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

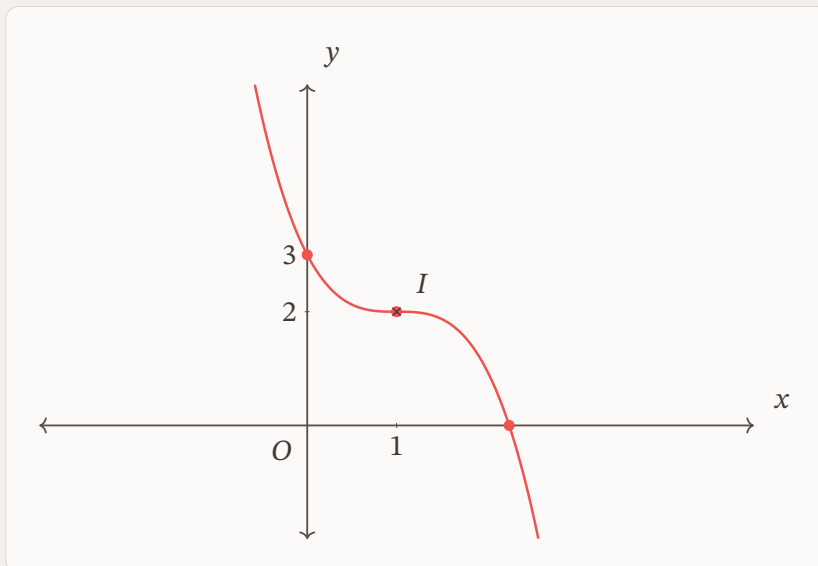
Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = -3(x - 1)^2$. Đạo hàm âm hai phía của 1, bằng 0 tại 1; hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$p'(x)$		–	0	–	
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(1; 2)$; các điểm kiểm $(0; 3)$, $(2; 1)$. Không có tiệm cận. Hình tiếp tục đi xuống qua tâm, không quay đầu.



Hình 7

Đúng bảng và điểm chưa đủ nếu hình lại quay đầu tại $x = 1$; phải kiểm cả chiều đường cong.

Xem đề bài (trang 8).

Nhiệm vụ 07 – Hai nhánh đồng biến

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $g'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$. Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$, không có cực trị.

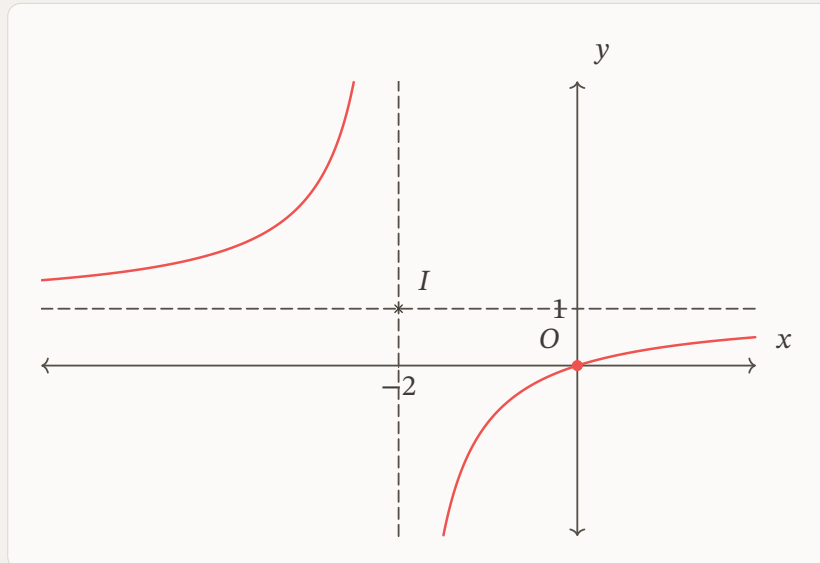
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	1	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	1

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = 1$, tâm $I(-2; 1)$. Giao cả hai trục tại O . Hai đường phân giác $y - 1 = \pm(x + 2)$ là trục đối xứng. Không nối qua -2 vì điểm này không thuộc tập xác định; các giới hạn còn cho thấy hai nhánh đi về hai phía vô cực.



Hình 8

Xem đề bài (trang 10).

Nhiệm vụ 08 – Kiểm lại dấu của phần dư

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

$$h'(x) = 1 + \frac{4}{(x-2)^2} > 0.$$

Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$; không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty,$$

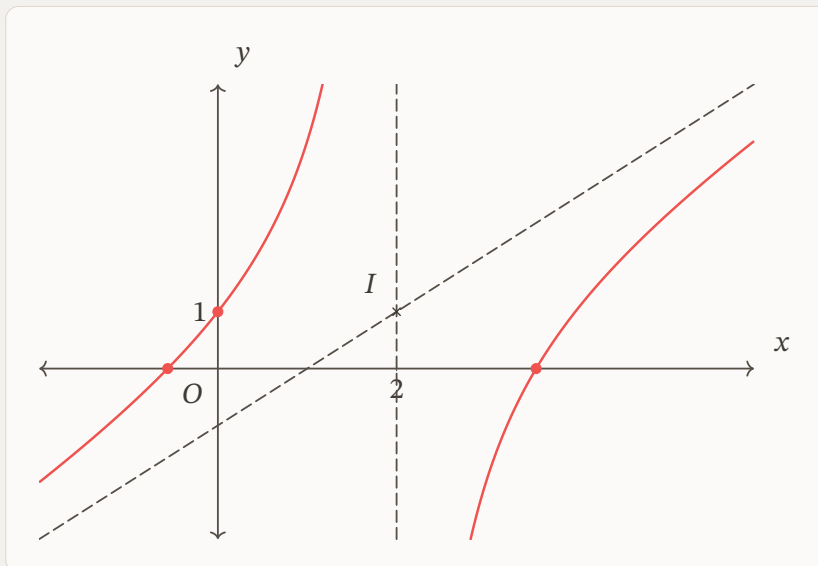
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x-1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x-1)] = 0.$$

Tiệm cận $x = 2$, $y = x - 1$; tâm $I(2; 1)$; $h(0) = 1$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Nhánh trái nằm trên đường xiên, nhánh phải nằm dưới. Tiêu chí: dấu cộng trong đạo hàm, đúng hướng ở điểm bị loại và hình đi qua $(0; 1)$.



Hình 9

Xem đề bài (trang 12).

Nhiệm vụ 09 – Chi phí trên hai tập đang xét

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$B'(x) = -\frac{18}{x^2} < 0$ trên tập đang xét $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất $B(2) = 13$, đơn vị triệu đồng mỗi tấn.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 4, \quad B(x) > 4.$$

Không có giá trị nhỏ nhất trên $[2; +\infty)$: với mỗi x , chọn khối lượng lớn hơn thì B nhỏ hơn. Trên $[2; 6]$, giá trị nhỏ nhất là $B(6) = 7$, đạt tại 6. Tiêu chí: hai tập đang xét cho hai kết luận khác nhau, không gọi 4 là giá trị nhỏ nhất.

Xem đề bài (trang 14).

Luyện tập

Nhiệm vụ 10 – Khảo sát một hàm bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

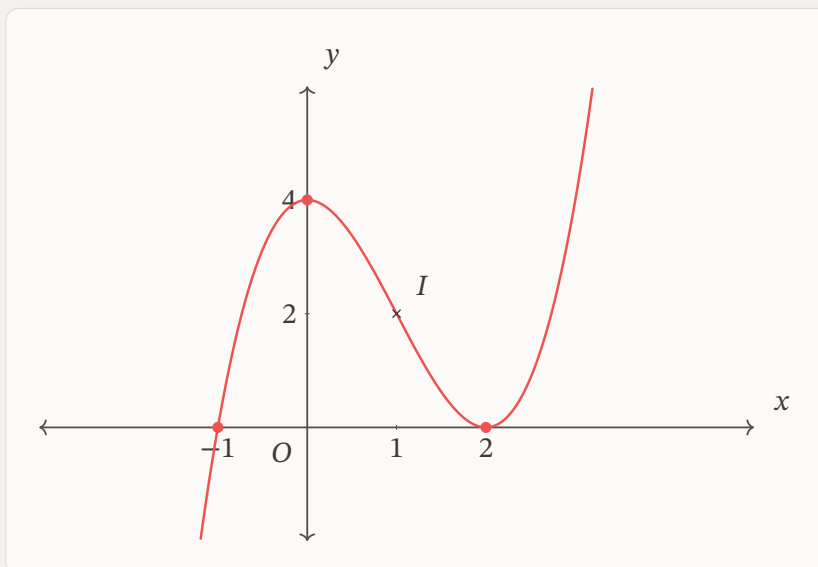
Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x(x - 2)$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$. Hàm đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại bằng 4; đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu bằng 0. Các điểm cực trị tương ứng của đồ thị là $(0; 4)$ và $(2; 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Dấu đạo hàm bằng 0 tại 0, 2; dấu trên các khoảng là dấu đã ghi ở trên. $f(x) = (x+1)(x-2)^2$, nên giao điểm với trục hoành tại $(-1; 0)$, $(2; 0)$; giao điểm với trục tung tại $(0; 4)$. Tâm $I(1; 2)$; không có tiệm cận. Đồ thị đi qua trục hoành tại -1 , chạm rồi đổi chiều tại 2.



Hình 10

Tiêu chí: không nhầm hai nghiệm của hàm với hai hoành độ cực trị; hình phải phù hợp cả bảng và giao điểm.

Xem đề bài (trang 15).

Nhiệm vụ 11 – Không có cực trị theo hai cách

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$p'(x) = 3(x+1)^2$, dương hai phía -1 và bằng 0 tại -1 ; p đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị. Tâm của đồ thị p là $I(-1; -1)$. $q'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ trên $\mathbb{R}$, nên q cũng đồng biến, không có cực trị nhưng không có điểm đạo hàm bằng 0. Tiêu chí: nêu được sự khác nhau của hai đạo hàm và vì sao cả hai đều không có cực trị.

Xem đề bài (trang 15).

Nhiệm vụ 12 – Khảo sát phân thức với hai nhánh tăng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

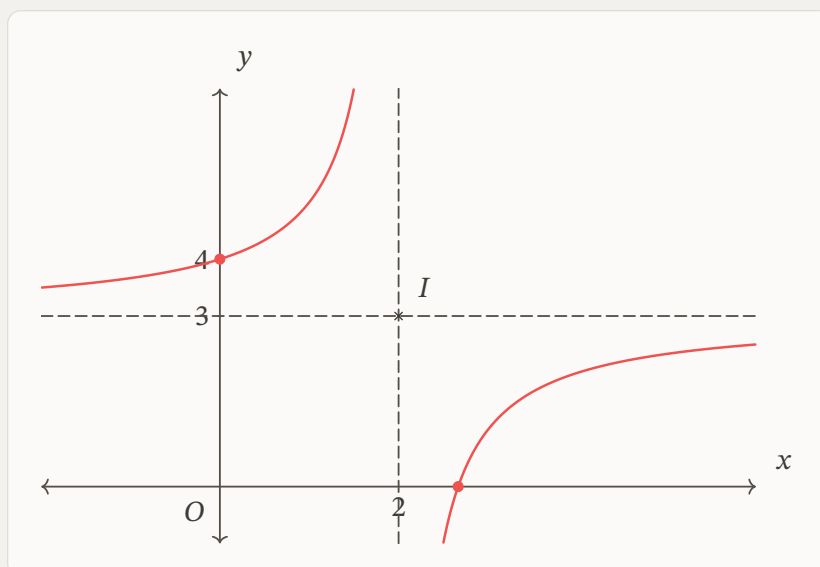
$f(x) = 3 - \frac{2}{x-2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} > 0$. Đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$; không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	3	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	3

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 2$, $y = 3$; tâm $I(2; 3)$; các trục đối xứng $y - 3 = \pm(x - 2)$. Đồ thị giao với trục hoành $\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, trục tung $(0; 4)$.



Hình 11

Xem đề bài (trang 15).

Nhiệm vụ 13 – Khảo sát phân thức có tiệm cận xiên

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

$$h(x) = x + 2 + \frac{4}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

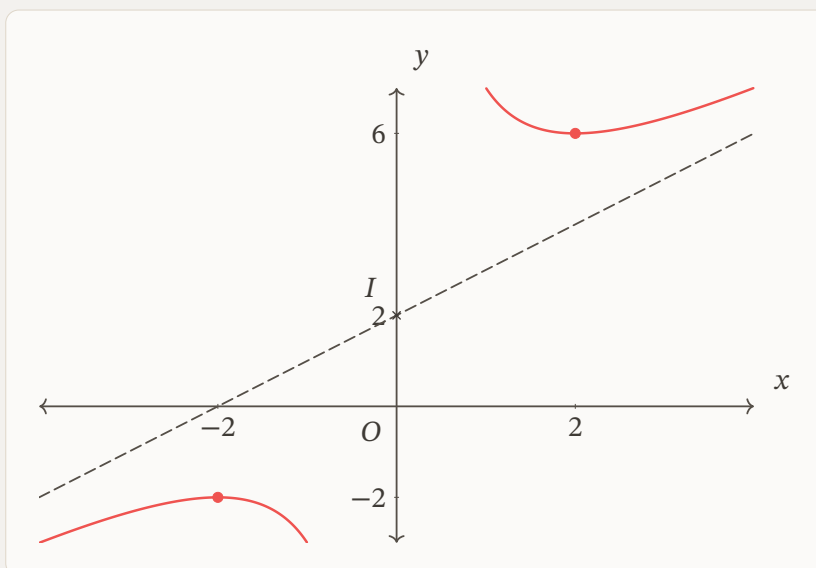
Đồng biến trên $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(-2; 0)$, $(0; 2)$. Cực đại tại -2 , giá trị -2 ; cực tiểu tại 2 , giá trị 6 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đạo hàm bằng 0 tại $-2, 2$. Tiệm cận $x = 0$, $y = x + 2$; tâm $I(0; 2)$. Từ $(x+1)^2 + 3 > 0$, nên không giao điểm với trục hoành; không có điểm trên trục tung vì 0 bị loại. Hai trục đối xứng là hai phân giác của hai tiệm cận.



Hình 12

Cực trị là so sánh trong lân cận; hai cực trị thuộc hai nhánh khác nhau. Không lấy quan hệ giữa hai giá trị ấy để bác bỏ kết quả.

Xem đề bài (trang 16).

Nhiệm vụ 14 – Dấu trừ làm thay đổi hai nhánh

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

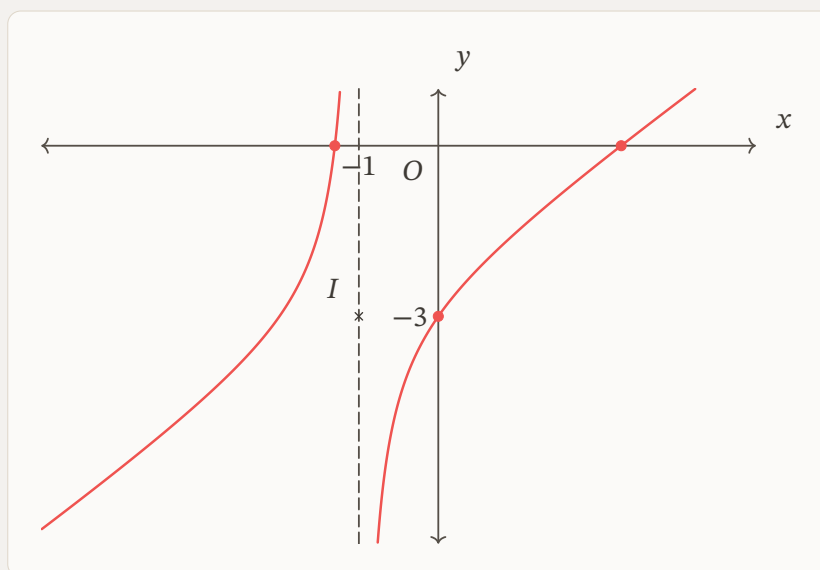
$v(x) = x - 2 - \frac{1}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $v'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Đồng biến trên từng khoảng xác định, không cực trị.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x - 2)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x - 2)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Dấu đạo hàm		+		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = x - 2$; tâm $I(-1; -3)$. Đồ thị giao với trục tung $(0; -3)$; giao điểm với trục hoành $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 0\right)$. Hai phân giác của tiệm cận là các trục đối xứng. Nhánh trái nằm trên đường xiên, nhánh phải nằm dưới.



Hình 13

Xem đề bài (trang 16).

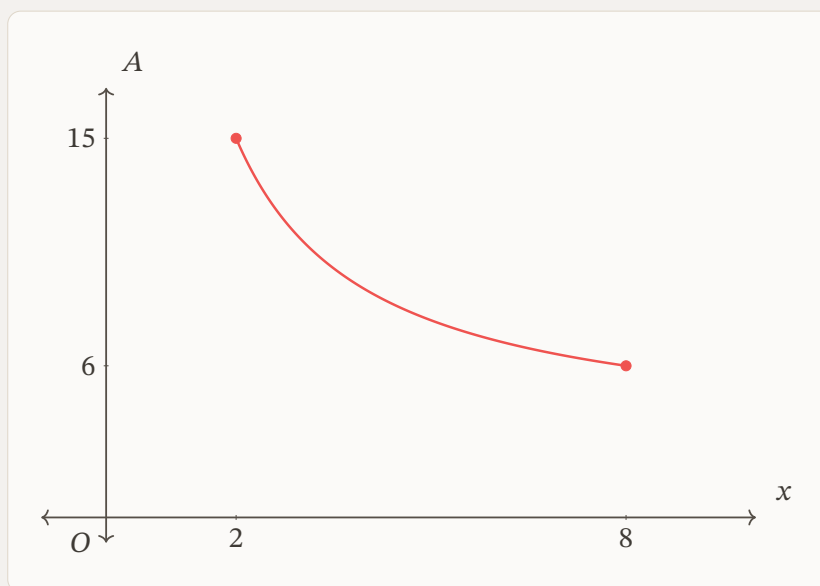
Nhiệm vụ 15 – Đồ thị chỉ trên khoảng sản lượng được phép**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

$$A'(x) = -\frac{24}{x^2} < 0 \text{ trên } [2; 8]; A(2) = 15, A(8) = 6.$$

x	2		8
$A(x)$	15	$\searrow$	6

Bảng biến thiên

Giá trị lớn nhất 15, đạt tại 2 tấn; nhỏ nhất 6, đạt tại 8 tấn. Đơn vị của giá trị là triệu đồng mỗi tấn.



Hình 14

Đề bài chỉ xét $x \in [2; 8]$, nên không xét $x \rightarrow +\infty$ cho đồ thị này. Đường tiệm cận ngang của hàm số mở rộng ngoài đoạn không xác định giá trị nhỏ nhất trên $[2; 8]$. Cần so sánh các giá trị trên chính đoạn đã cho và kiểm tra nơi đạt được.

Xem đề bài (trang 16).

Kiểm tra

Nhiệm vụ 16 – Khảo sát hàm bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

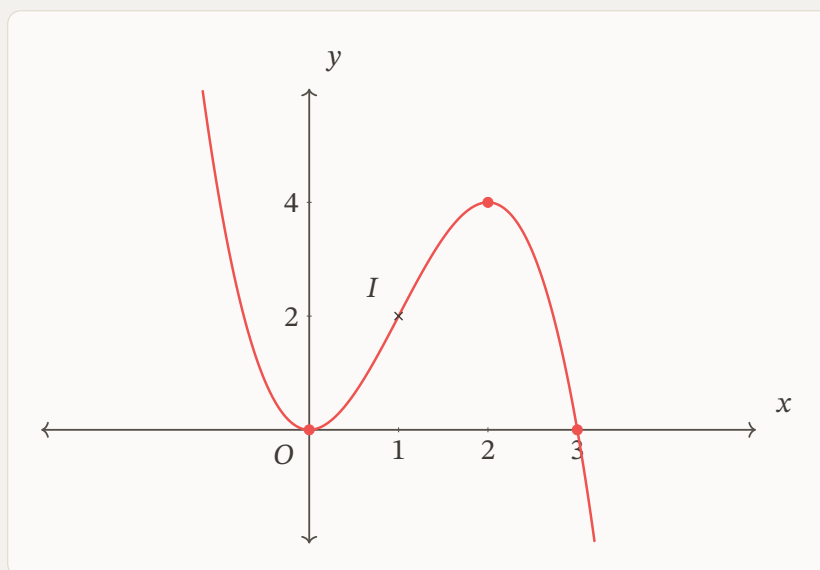
Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = -3x(x - 2)$. Dấu đạo hàm trên ba khoảng chia bởi 0, 2 lần lượt là $-$, $+$, $-$; bằng 0 tại hai mốc. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng 0; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; 0)$, hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại bằng 4; điểm cực đại của đồ thị là $(2; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Vì $f(x) = x^2(3 - x)$, giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, $(3; 0)$; giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Tâm $I(1; 2)$; không có tiệm cận. Đồ thị chạm trục hoành tại 0, đi qua tại 3.



Hình 15

Tiêu chí đối chiếu: đủ dữ kiện khảo sát, đúng chiều ở cả ba khoảng, đúng hai loại cực trị và đúng sự tiếp xúc/giao cắt. Hình không khớp bảng thì chưa xác nhận kỹ năng vẽ.

Xem đề bài (trang 18).

Nhiệm vụ 17 – Khảo sát phân thức bậc nhất

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

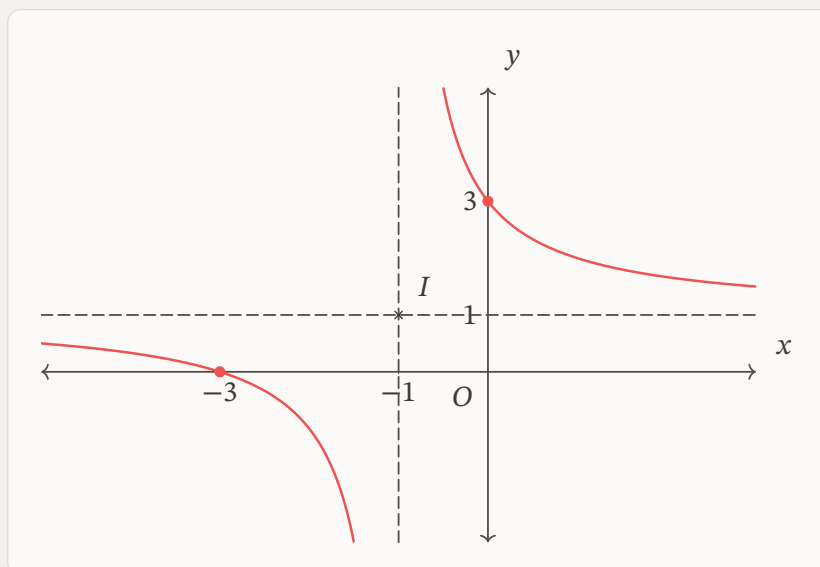
Ta có $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} < 0$. Hàm nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Biến thiên	1	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	1

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = 1$; tâm $I(-1; 1)$; giao điểm với các trục tọa độ tại $(-3; 0)$ và $(0; 3)$. Nhánh trái dưới tiệm cận ngang, nhánh phải trên tiệm cận ngang.



Hình 16

Tiêu chí: không ghép hai khoảng thành một khoảng nghịch biến, không vẽ nối qua điểm bị loại; giới hạn, giao điểm, tâm và hình thống nhất.

Xem đề bài (trang 18).

Nhiệm vụ 18 – Khảo sát phân thức bậc hai

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ta có

$$h(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad h'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

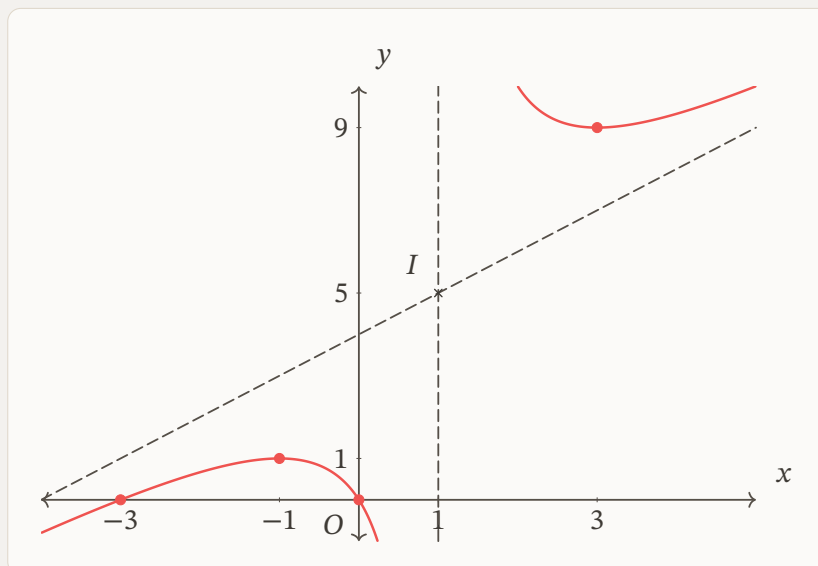
Đạo hàm bằng 0 tại $-1, 3$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại bằng 1; điểm cực đại của đồ thị là $(-1; 1)$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu bằng 9; điểm cực tiểu của đồ thị là $(3; 9)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x + 4)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x + 4)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		+		-		-		+	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x + 4$, tâm $I(1; 5)$. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận, không phải chính các tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(-3; 0)$, $(0; 0)$; giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên.



Hình 17

Tiêu chí: phép chia, dấu đạo hàm, bốn khoảng, giới hạn hai phía, hai tiệm cận và hình cùng đúng; hiểu tâm và trục đối xứng theo hai vai trò khác nhau.

Xem đề bài (trang 18).

Nhiệm vụ 19 – Kết luận trong tập đang xét của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Điều kiện của mô hình $[3; 9]$. Vì $B'(x) = -\frac{18}{x^2} < 0$ trên $(3; 9)$, hàm giảm trên đoạn; $B(3) = 11$, $B(9) = 7$. Giá trị lớn nhất là 11 triệu đồng mỗi tấn tại 3 tấn, nhỏ nhất là 7 triệu đồng mỗi tấn tại 9 tấn.

Đường $y = 5$ gần với giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của công thức mở rộng, không phải giá trị nhỏ nhất trên đoạn đã cho. Đồ thị bị giới hạn ở đoạn không có nhánh tiến ra vô cực. Không kết luận cho 20 tấn từ mô hình chỉ được giả thiết áp dụng trên $[3; 9]$.

Bài làm cần dùng đúng điều kiện về sản lượng, xét hai đầu mút của đoạn, ghi đơn vị cho kết quả và không áp dụng công thức cho sản lượng nằm ngoài điều kiện đề bài.

Xem đề bài (trang 18).

Ôn lại

Nhiệm vụ 20 – Nhớ lại khảo sát bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

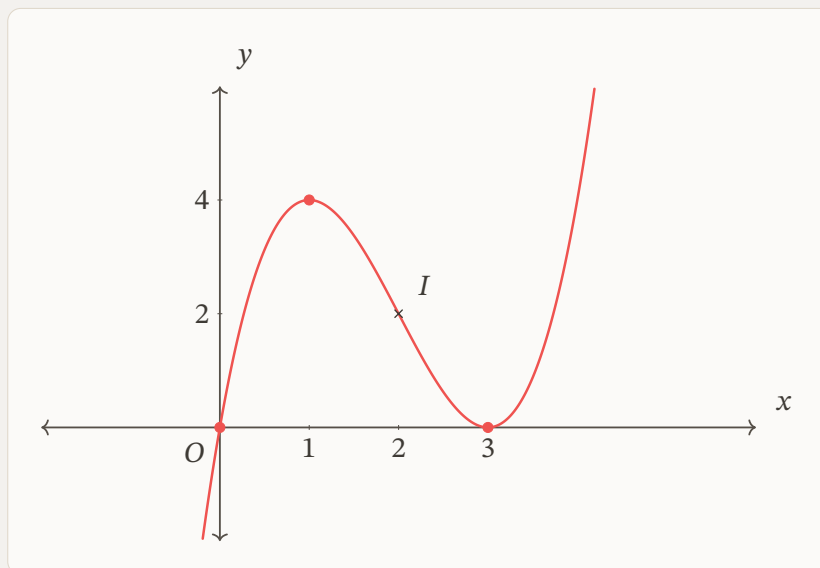
Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$. Dấu $+$, $-$, $+$ trên ba khoảng, bằng 0 tại 1, 3. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại bằng 4; điểm cực đại của đồ thị là $(1; 4)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu bằng 0; điểm cực tiểu của đồ thị là $(3; 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = x(x-3)^2$; giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, $(3; 0)$ và trục tung tại $(0; 0)$. Tâm $I(2; 2)$; không tiệm cận. Đồ thị đi qua trục hoành tại 0 và chạm tại 3.



Hình 18

Tiêu chí: tự khôi phục quy trình và hình đúng; đây là mẫu kiểm bậc ba, không thay kiểm hai họ phân thức.

Xem đề bài (trang 20).

Nhiệm vụ 21 – Nhớ lại phân thức và điều kiện của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

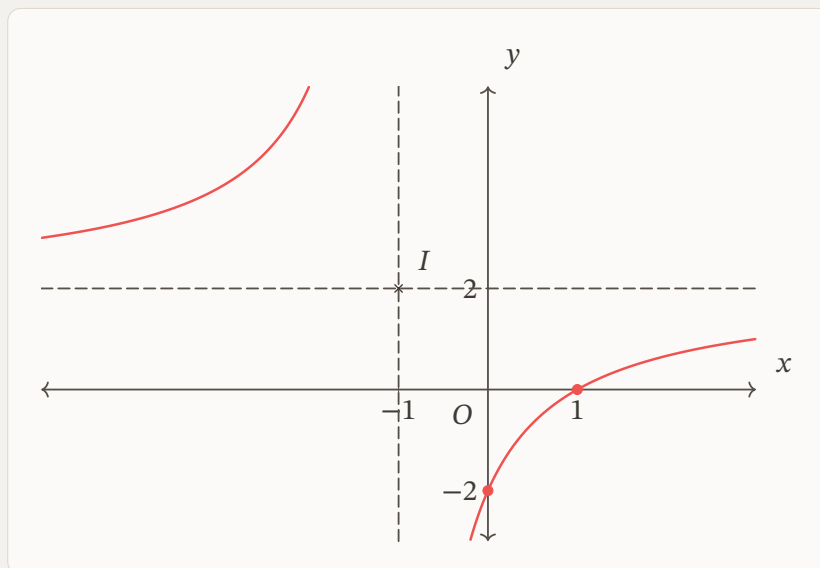
a) Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$, nên hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$, không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Biến thiên	2	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	2

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = 2$; tâm $I(-1; 2)$; giao điểm với các trục tọa độ tại $(1; 0)$, $(0; -2)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới tiệm cận ngang.



Hình 19

- b) $A'(x) = -\frac{30}{x^2} < 0$; hàm giảm trên $[3; 15]$. Giá trị lớn nhất $A(3) = 12$, nhỏ nhất $A(15) = 4$, đều tính bằng triệu đồng mỗi tấn. Cận 2 của công thức mở rộng không được đạt trên đoạn; đoạn kết thúc ở 15.

Đối chiếu và ghi kết quả từng ý. Làm được ý a về khảo sát phân thức chưa cho biết em đã tìm đúng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và giữ đúng điều kiện của mô hình ở ý b.

Xem đề bài (trang 20).

Nhiệm vụ 22 – Nhớ lại tiệm cận xiên và cực trị

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. Đạo hàm bằng 0 tại $-1, 1$; hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-1; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu bằng 4; điểm cực tiểu của đồ thị là $(1; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty;$$

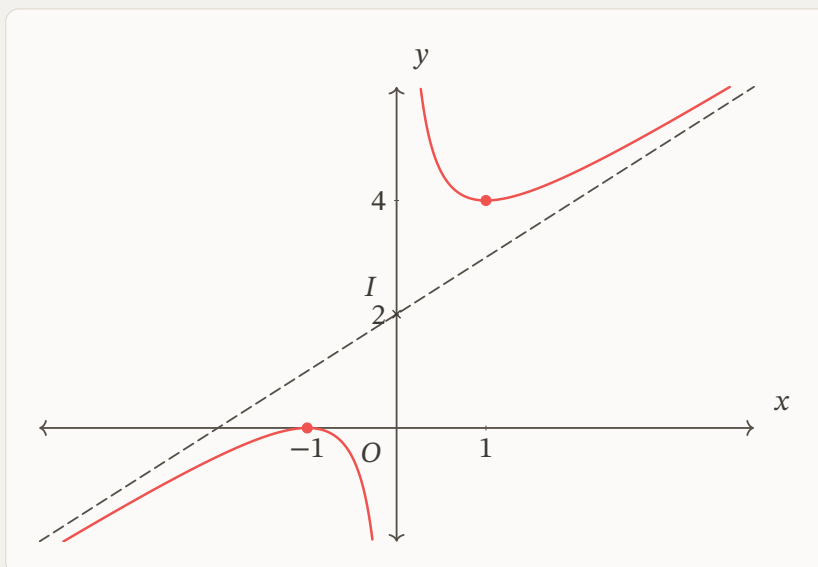
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x + 2)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x + 2)] = 0.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		+		-		-		+	
Biến thiên	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 0$, $y = x + 2$; tâm $I(0; 2)$. Trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận. Vì $h(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$, giao điểm với trục hoành tại $(-1; 0)$, không giao điểm với trục tung. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên.



Hình 20

Tiêu chí: không đặt giá trị hàm tại điểm loại, không gọi điểm ấy là cực trị; hình phải thể hiện đúng hai cực trị và hai nhánh.

Xem đề bài (trang 21).

Sửa lỗi

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 23 – Bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

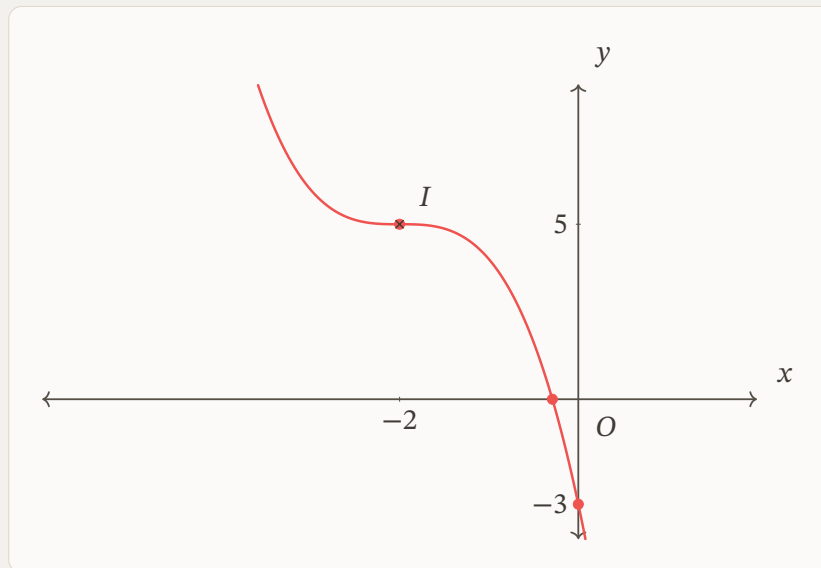
- a) Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = -3(x+2)^2$, dấu âm ở cả hai phía của -2 , bằng 0 chỉ tại mốc này. Hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(-2; 5)$; không tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(\sqrt[3]{5} - 2; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; -3)$. Hoành độ giao điểm với trục hoành được tìm từ phương trình $p(x) = 0$, không phải từ phương trình đạo hàm.



Hình 21

Với hàm so sánh, $q'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm đồng biến, không cực trị và không có nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0; đây là khả năng khác với p' có một nghiệm nhưng không đổi dấu. Muốn xác nhận đủ hai khả năng, phải giải thích cả phần so sánh này.

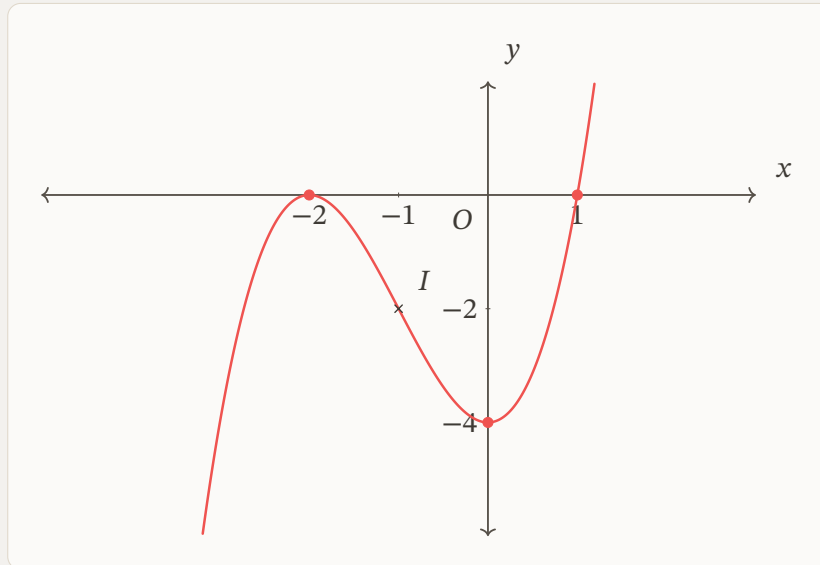
- b) Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x(x + 2)$; dấu +, -, + trên ba khoảng chia bởi -2, 0. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-2; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng -4; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; -4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = (x - 1)(x + 2)^2$; giao điểm với trục hoành tại $(-2; 0)$, $(1; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; -4)$. Tâm $I(-1; -2)$; không tiệm cận.



Hình 22

Tiêu chí ý b: toàn bộ chuỗi dữ kiện và hình thống nhất; làm được ý a không thay được ý b.

Xem đề bài (trang 25).

Nhiệm vụ 24 – Phân thức và bài toán thực tế

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

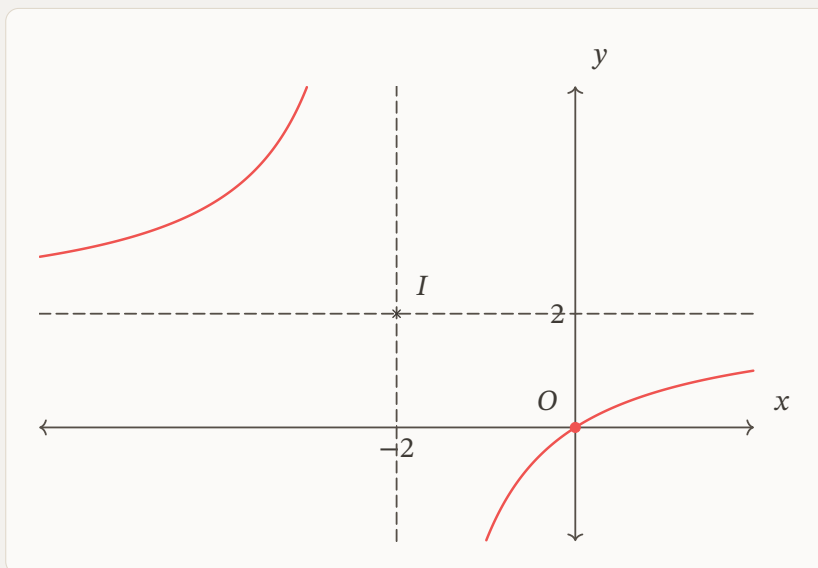
a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$; $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$. Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	2	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	2

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = 2$; tâm $I(-2; 2)$; giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Hai trục đối xứng là $y - 2 = \pm(x + 2)$. Nhánh trái ở trên, nhánh phải ở dưới tiệm cận ngang.



Hình 23

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $h(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Đạo hàm bằng 0 tại $-2, 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-2; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng 4; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty;$$

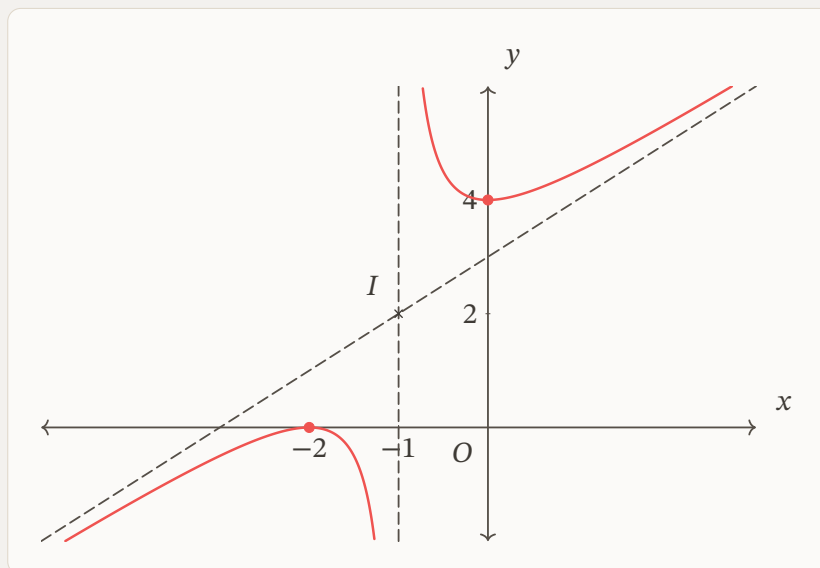
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x + 3)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x + 3)] = 0.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -1$, $y = x + 3$; tâm $I(-1; 2)$. Đồ thị giao với trục hoành tại $(-2; 0)$ vì $h(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$; giao điểm với trục tung $(0; 4)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận.



Hình 24

- c) Với $v(x) = x + 3 - \frac{1}{x+1}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $v'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty;$$

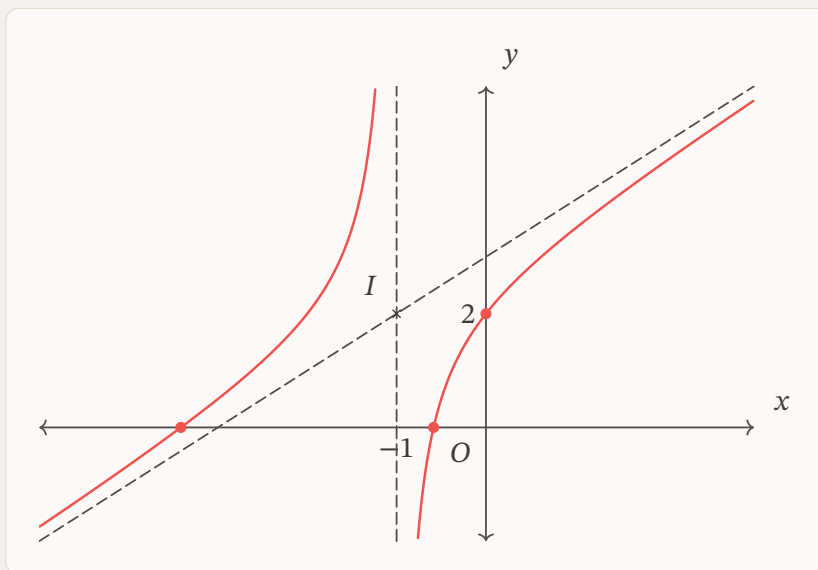
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x + 3)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x + 3)] = 0.$$

Tiệm cận $x = -1$, $y = x + 3$; tâm $I(-1; 2)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới đường xiên.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đồ thị giao với trục hoành tại $(-2 - \sqrt{2}; 0)$, $(-2 + \sqrt{2}; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 2)$. Các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi $x = -1$ và $y = x + 3$.



Hình 25

Ý này xác nhận khảo sát trường hợp không cực trị khi cả lập luận, bảng và hình đều đúng.

- d) $A'(x) = -\frac{20}{x^2} < 0$. Trên $[2; +\infty)$, lớn nhất $A(2) = 11$; không có giá trị nhỏ nhất vì hàm tiếp tục giảm, $A(x) > 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 1$. Trên $[2; 10]$, lớn nhất vẫn 11, nhỏ nhất $A(10) = 3$, đều tính bằng triệu đồng mỗi tấn. Phải nêu sự khác nhau giữa cận không đạt ở tập đang xét ban đầu và giá trị đạt tại đầu mút ở tập đang xét sau.

Tiêu chí: đánh dấu riêng ý đã tự làm; ý a không xác nhận phân thức bậc hai, ý b không xác nhận trường hợp không cực trị, ý c xác nhận riêng trường hợp không cực trị, ý d không xác nhận khảo sát phân thức.

Xem đề bài (trang 26).

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 25 – Bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

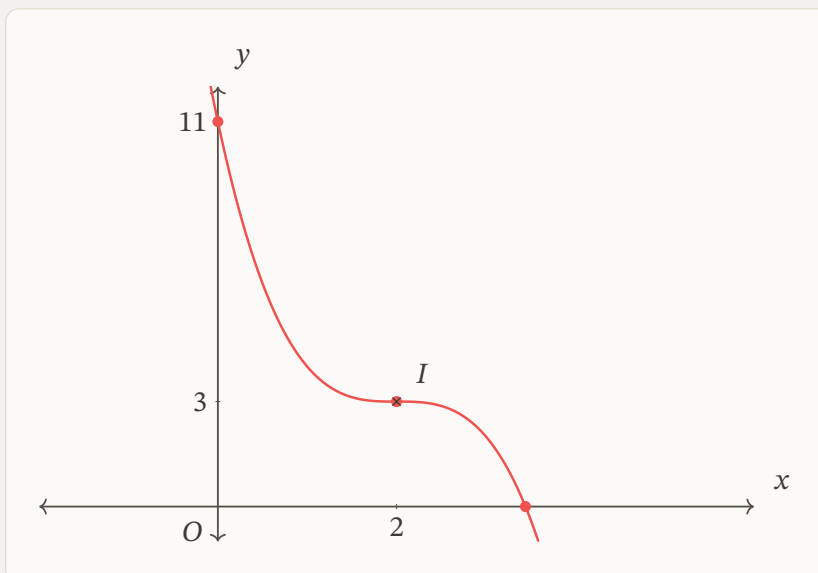
- a) Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = -3(x - 2)^2$, dấu âm ở cả hai phía của 2, bằng 0 chỉ tại mốc này. Hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(2; 3)$; không tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(2 + \sqrt{3}; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 11)$. Hoành độ giao điểm với trục hoành được tìm từ phương trình $p(x) = 0$, không phải từ phương trình đạo hàm.



Hình 26

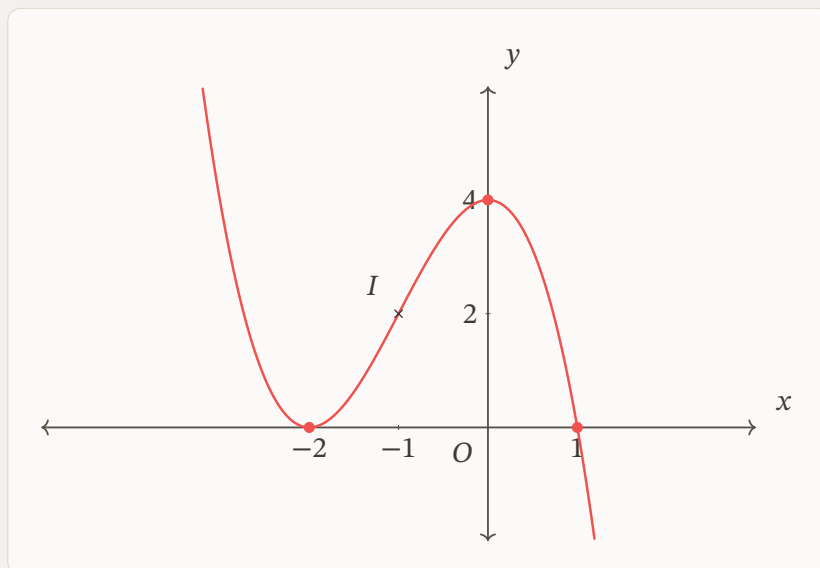
- b) Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = -3x(x + 2)$, dấu $-$, $+$, $-$ trên ba khoảng chia bởi $-2, 0$; bằng 0 tại hai mốc. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$, giá trị cực tiểu bằng 0; điểm cực tiểu của đồ thị là $(-2; 0)$, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại bằng 4; điểm cực đại của đồ thị là $(0; 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Biến thiên	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = -(x - 1)(x + 2)^2$; giao điểm với trục hoành $(-2; 0)$, $(1; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 4)$; tâm $I(-1; 2)$; không tiệm cận.



Hình 27

Tiêu chí: dữ kiện đúng và hình đúng; giữ nguyên kết quả bài kiểm tra cũ, ghi bằng chứng sửa riêng.

Xem đề bài (trang 26).

Nhiệm vụ 26 – Phân thức và bài toán thực tế

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

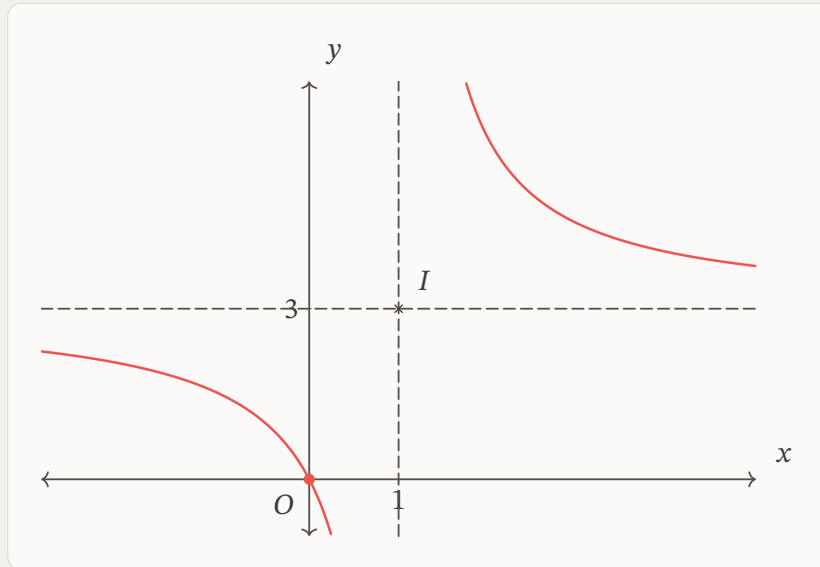
a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = 3 + \frac{3}{x-1}$; $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0$. Hàm nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Biến thiên	3	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	3

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 1$, $y = 3$; tâm $I(1; 3)$; giao điểm với trục hoành tại $(0; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; 0)$. Hai trục đối xứng là $y - 3 = \pm(x - 1)$. Nhánh trái ở dưới, nhánh phải ở trên tiệm cận ngang.



Hình 28

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $h(x) = x + 2 + \frac{4}{x+2}$,

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

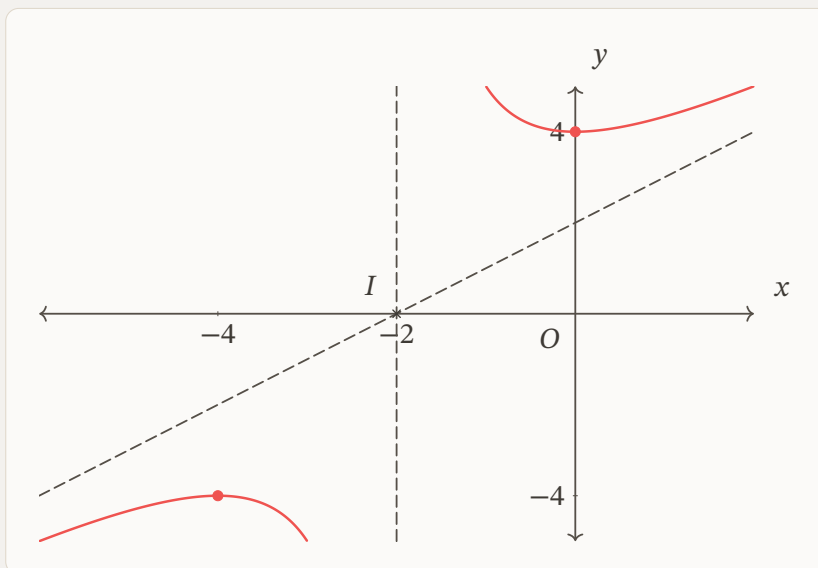
Đạo hàm bằng 0 tại $-4, 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = -4$, giá trị cực đại bằng -4 ; điểm cực đại của đồ thị là $(-4; -4)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu bằng 4 ; điểm cực tiểu của đồ thị là $(0; 4)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x+2)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
Dấu đạo hàm bên trong		$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$	
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = x + 2$; tâm $I(-2; 0)$. Không giao điểm với trục hoành vì tử $(x+2)^2 + 4 > 0$; giao điểm với trục tung tại $(0; 4)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận.



Hình 29

- c) Với $v(x) = x + 2 - \frac{4}{x+2}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $v'(x) = 1 + \frac{4}{(x+2)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} v(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty;$$

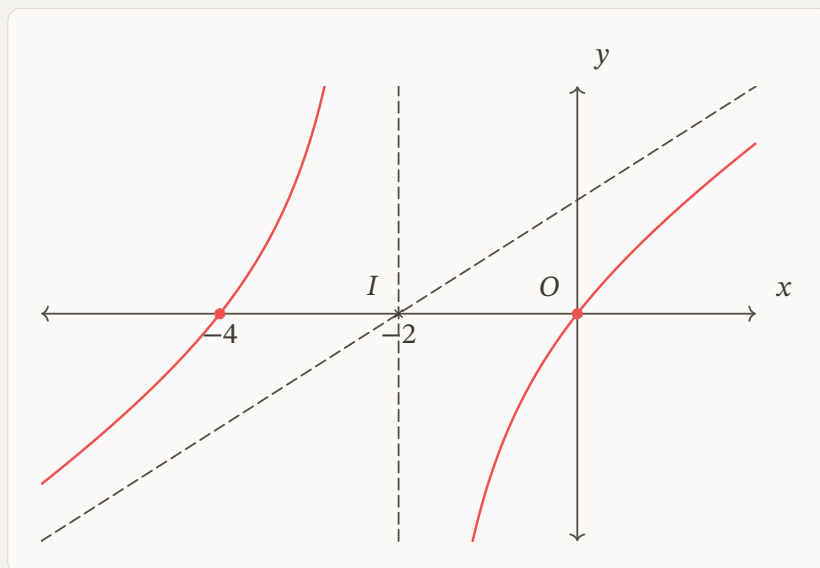
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x + 2)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x + 2)] = 0.$$

Tiệm cận $x = -2$, $y = x + 2$; tâm $I(-2; 0)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới đường xiên.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đồ thị giao với trục hoành tại $(-4; 0)$, $(0; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 0)$. Các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi $x = -2$ và $y = x + 2$.



Hình 30

Ý này xác nhận khảo sát trường hợp không cực trị khi cả lập luận, bảng và hình đều đúng.

- d) $A'(x) = -\frac{24}{x^2} < 0$. Trên $[3; +\infty)$, lớn nhất $A(3) = 12$, không có giá trị nhỏ nhất; $A(x) > 4$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 4$. Trên $[3; 12]$, lớn nhất 12, nhỏ nhất $A(12) = 6$, đơn vị triệu đồng mỗi tấn. Ghi rõ đầu mút đạt được.

Tiêu chí và giới hạn từng ý như tên kĩ năng trong đề; kết quả sửa được ghi riêng, không thay bài kiểm tra gốc.

Xem đề bài (trang 26).

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 27 – Bậc ba

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

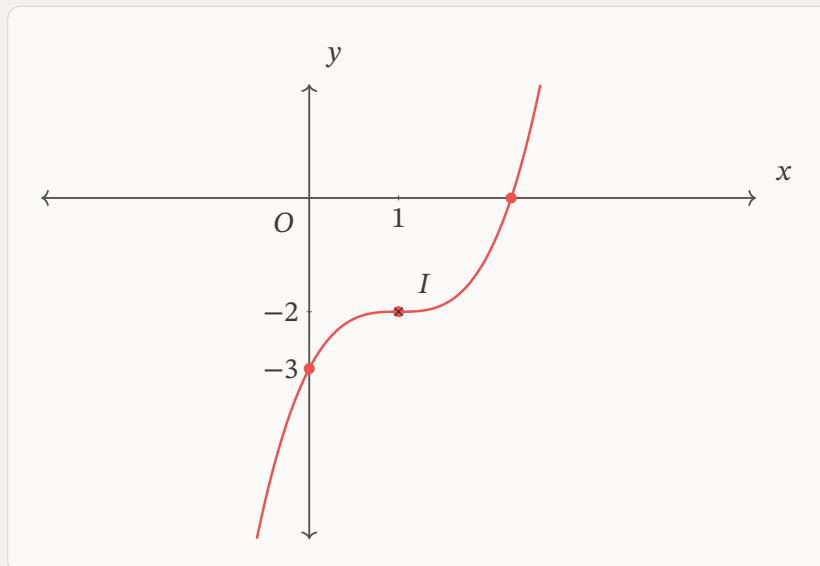
- a) Tập xác định $\mathbb{R}$; $p'(x) = 3(x - 1)^2$, dấu dương ở cả hai phía của 1, bằng 0 chỉ tại mốc này. Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tâm $I(1; -2)$; không tiệm cận. Đồ thị giao với trục hoành tại $(1 + \sqrt[3]{2}; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; -3)$. Hoành độ giao điểm với trục hoành được tìm từ phương trình $p(x) = 0$, không phải từ phương trình đạo hàm.



Hình 31

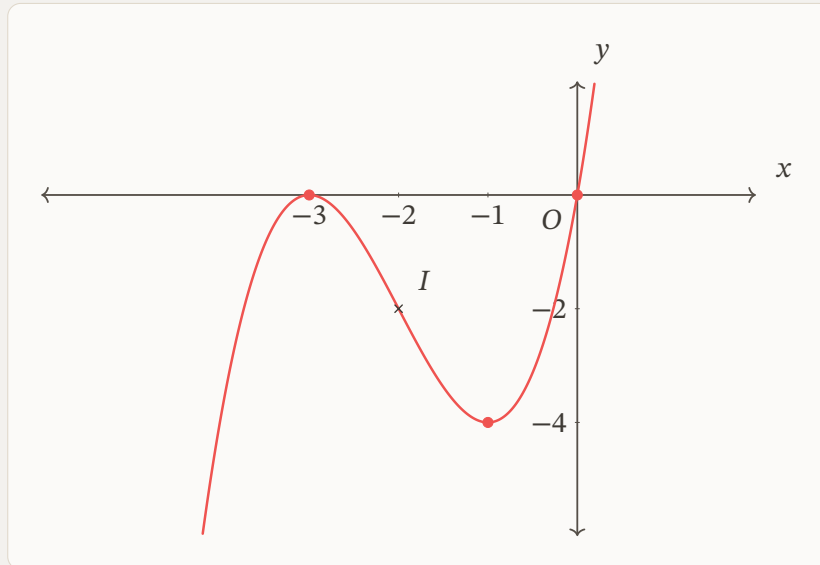
- b) Tập xác định $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3(x+3)(x+1)$, dấu $+$, $-$, $+$ trên ba khoảng chia bởi -3 , -1 ; bằng 0 tại hai mốc. Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, giá trị cực đại bằng 0; điểm cực đại của đồ thị là $(-3; 0)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, giá trị cực tiểu bằng -4 ; điểm cực tiểu của đồ thị là $(-1; -4)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

$f(x) = x(x+3)^2$; giao điểm với trục hoành $(-3; 0)$, $(0; 0)$; giao điểm với trục tung $(0; 0)$; tâm $I(-2; -2)$; không tiệm cận.



Hình 32

Tiêu chí: tự khôi phục đủ quy trình; ghi khoảng trẽ thực tế và phần đã phải xem hỗ trợ.

Xem đề bài (trang 27).

Nhiệm vụ 28 – Phân thức và bài toán thực tế

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

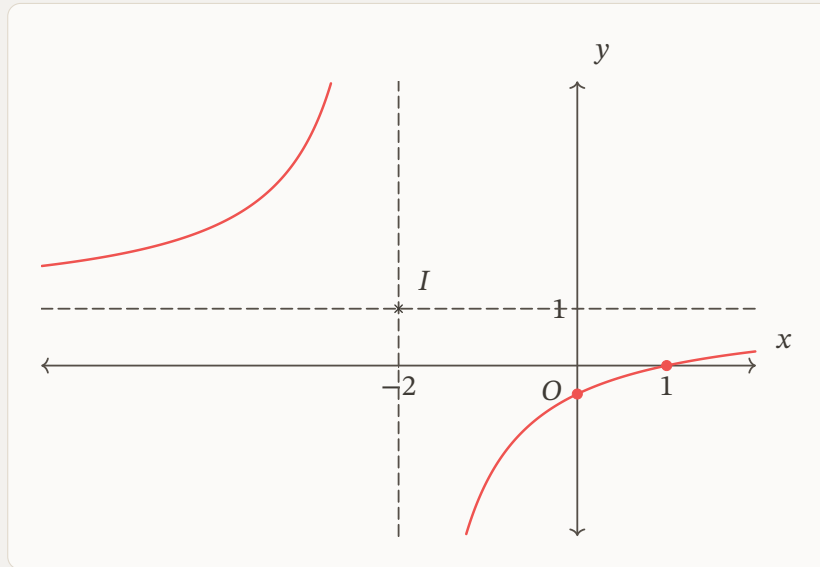
a) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$; $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$. Hàm đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Biến thiên	1	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	1

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = -2$, $y = 1$; tâm $I(-2; 1)$; giao điểm với trục hoành tại $(1; 0)$, giao điểm với trục tung tại $(0; -\frac{1}{2})$. Hai trục đối xứng là $y - 1 = \pm(x + 2)$. Nhánh trái ở trên, nhánh phải ở dưới tiệm cận ngang.



Hình 33

b) Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; $h(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}.$$

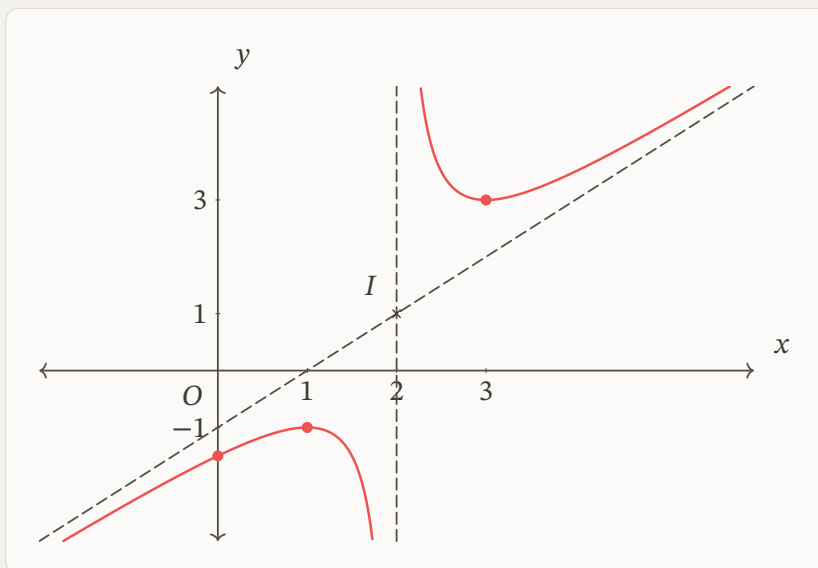
Đạo hàm bằng 0 tại 1, 3. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại bằng -1 ; điểm cực đại của đồ thị là $(1; -1)$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu bằng 3; điểm cực tiểu của đồ thị là $(3; 3)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - (x - 1)] &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (x - 1)] &= 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$	
Dấu đạo hàm bên trong		+		-		-		+		
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty \searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Tiệm cận $x = 2$, $y = x - 1$; tâm $I(2; 1)$. Không giao điểm với trục hoành vì $x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; giao điểm với trục tung $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$. Nhánh trái dưới, nhánh phải trên đường xiên. Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai tiệm cận.



Hình 34

- c) Với $v(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$, tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $v'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0$: đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$, không cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} v(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} v(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty;$$

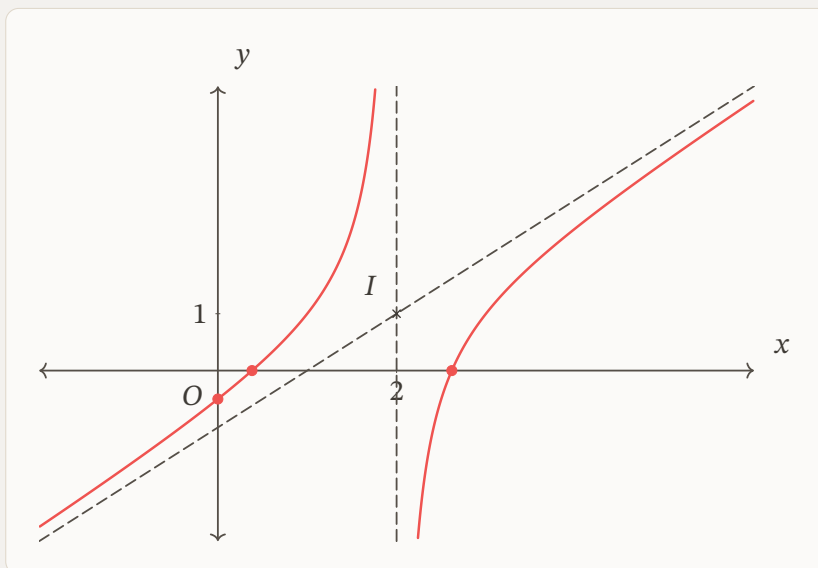
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [v(x) - (x - 1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x) - (x - 1)] = 0.$$

Tiệm cận $x = 2$, $y = x - 1$; tâm $I(2; 1)$. Nhánh trái trên, nhánh phải dưới đường xiên.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Biến thiên	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên

Đồ thị giao với trục hoành tại $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$; giao điểm với trục tung $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi $x = 2$ và $y = x - 1$.



Hình 35

Ý này xác nhận khảo sát trường hợp không cực trị khi cả lập luận, bảng và hình đều đúng.

- d) $A'(x) = -\frac{36}{x^2} < 0$. Trên $[3; +\infty)$, lớn nhất $A(3) = 14$, không có giá trị nhỏ nhất; $A(x) > 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 2$. Trên $[3; 9]$, lớn nhất 14, nhỏ nhất $A(9) = 6$, đơn vị triệu đồng mỗi tấn.

Tiêu chí: tách kết quả các ý; bài làm ngay sau hỗ trợ chưa chứng minh nhớ lâu. Lên lịch xác nhận tiếp nếu còn tái lỗi; không lấy trước câu của lượt ôn khác.

Xem đề bài (trang 27).

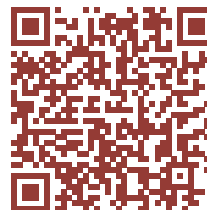
Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*, ban hành kèm Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT. Phần lớp 12, trang 106–107.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một*, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống. Bài 4, trang 26–32: sơ đồ khảo sát, hàm bậc ba, hai họ phân thức và tính đối xứng.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học



Bảo trợ ZO Math

Nếu học liệu hữu ích với bạn, bạn có thể bảo trợ ZO Math tiếp tục biên soạn và chia sẻ.



Ngân hàng

Vietcombank

Số tài khoản

0601000137768

Chủ tài khoản

Nguyễn Tấn Nhật

Nội dung chuyển khoản

BAO TRỢ ZO MATH

Xem thông tin bảo trợ ZO Math