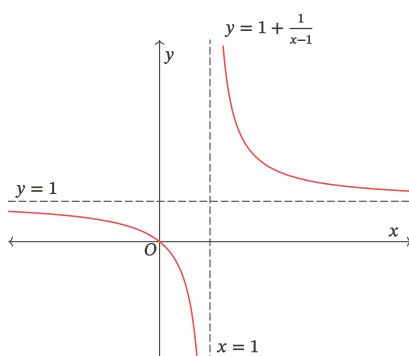


Đường tiệm cận

Sửa lỗi

Bảng nhận diện lỗi và các nhiệm vụ sửa sau Luyện tập, Kiểm tra, Ôn lại.



Mở trang Đường tiệm cận

R1-G03

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học	2
Chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học	3
Khi cần hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	4
Sửa lỗi	5
Chọn bài theo dấu hiệu	5
Đọc lỗi để biết cần xem lại gì	8
Sau Luyện tập	9
Sau Kiểm tra	11
Sau Ôn lại	13
Sau câu xác nhận và khi hết bài mới	15
Nguồn	16

Bắt đầu

Học liệu “Đường tiệm cận” giúp em dùng giới hạn để xác định tiệm cận đứng, ngang và xiên của đồ thị hàm số. Em sẽ tập xét đúng tập xác định, phân biệt các phía tiến tới và dùng giới hạn để giải thích hình vẽ. Với bài toán thực tế, kết luận phải phù hợp với điều kiện và đơn vị mà mô hình đã cho. Bài Kiểm tra đánh giá mục tiêu của học liệu, không mô phỏng cấu trúc đề thi tốt nghiệp.

Một điểm bị loại khỏi tập xác định có luôn tạo ra tiệm cận đứng không? Đồ thị đã cắt một đường thẳng còn có thể tiến sát đường ấy ở rất xa không? Hai đầu của cùng một đồ thị có thể tiến sát hai đường khác nhau không?

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Giữ tập xác định và phân biệt giới hạn với giá trị	Giữ đúng tập xác định; phân biệt giá trị tại một điểm với hành vi của hàm số khi biến tiến gần điểm ấy.
Tìm tiệm cận ngang	Xét riêng hai đầu vô cực, nêu phương trình và hướng tương ứng; không đếm trùng đường.
Tìm tiệm cận đứng	Dùng ít nhất một giới hạn một phía vô cực hợp lệ; giữ đúng dấu và phía.
Tìm tiệm cận xiên	Tìm đủ phương trình đường thẳng, kiểm phần chênh lệch tiến về 0 ở hướng đang xét và nối kết quả với hình.
Nối dữ kiện với hình	Nối công thức, dữ kiện giới hạn và nhánh đồ thị; giải thích vì sao đồ thị có thể cắt đường tiệm cận.
Diễn giải mô hình	Chọn kết luận vừa đủ dữ kiện và diễn giải kết quả trong mô hình được cho, đúng điều kiện và đơn vị.
Đánh giá và sửa lập luận	Giữ phần đúng, sửa đúng lí do; khi cần xác nhận sau sửa, tự làm câu phù hợp còn chưa xem lời giải.

Tiên quyết

Em cần biến đổi được phân thức, xét dấu đơn giản và đọc kí hiệu giới hạn. Các nhiệm vụ **Khởi động (mở trên trang học liệu)** giúp em tự kiểm bốn thao tác nền này trước khi vào phần học. Nếu thiếu thao tác nào, dùng đúng phần **Ôn nền (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Đạo hàm không bắt buộc trong các nhiệm vụ chính.

Nhánh **Phối hợp (mở trên trang học liệu)** cần kiến thức về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên tập đang xét. Nhánh **Chuyển giao (mở trên trang học liệu)** cần đọc được giới hạn chứa căn và trị tuyệt đối. Hai nhánh là lựa chọn thêm.

Cách học

Chuẩn bị giấy để giữ bài tự làm và ghi lí do cho từng kết luận. Tự trả lời trước khi mở phần đối chiếu. Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi; riêng một lượt Kiểm tra phải thực hiện liên tục theo hướng dẫn của phần ấy. Khởi động chỉ khảo sát một số thao tác nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc chứng nhận đạt cả gói.

Nếu cần học từ đầu, làm **Khởi động** (mở trên trang học liệu), rồi đọc **Giới hạn mô tả hành vi của hàm số** (mở trên trang học liệu). Ở mỗi mục kiến thức, thử trả lời Gọi mở trước khi đọc phần giải thích; Gọi mở không thay nhiệm vụ cuối mỗi mục. Câu Nhiệm vụ trong Bài học có lời giải riêng.

Chọn nơi bắt đầu

- Cần học hoặc nhớ lại khái niệm: vào **Bài học** (mở trên trang học liệu).
- Đã hiểu và muốn tự làm: vào **Luyện tập** (mở trên trang học liệu).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu), kể cả chưa làm các phần trước.
- Đến ngày hẹn: chọn lượt ở **Ôn lại** (mở trên trang học liệu).

Đó là các điểm vào theo nhu cầu. Việc bỏ qua một phần không tự cho biết em đã làm chủ phần ấy.

Bản đồ học

Bài học (mở trên trang học liệu) → **Luyện tập** (mở trên trang học liệu) → **Kiểm tra** (mở trên trang học liệu) → **Ôn lại** (mở trên trang học liệu)

Đây là tiến trình được khuyến nghị và thứ tự tra đọc. Em được chọn điểm vào, đi tới hoặc quay lại theo nhu cầu; không phải hoàn tất lần lượt mọi phần mới được vào phần tiếp theo. Phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại thực hiện theo ngày hẹn.

Ôn nền, Lời giải, Sửa lỗi và Nhật kí là các hỗ trợ được gọi khi cần, theo bảng dưới. Sau hỗ trợ, trở về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Khi cần hỗ trợ

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Nhớ lại một khái niệm của gói	Đúng mục trong Bài học (mở trên trang học liệu)	Trở về câu đang vướng
Bổ sung cách đọc giới hạn hoặc biến đổi	Đúng phần Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu nền rồi trở về bài gốc
Đối chiếu hoặc sửa bài đã làm	Lời giải (mở trên trang học liệu), rồi Sửa lỗi (trang 5) nếu cần	Kiểm đúng phần còn sai bằng câu phù hợp chưa xem đáp án
Lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi dữ kiện đã có, không cần ghi sau mọi thao tác

Giữ bài tự làm trước khi mở trợ giúp; khi đối chiếu, xem cả lí do và kết luận. Nếu đã nhận trợ giúp, ghi riêng phần làm được sau đó. Câu đã xem đáp án dùng để học lại, không tính là lần tự làm mới.

Riêng trong một lượt Kiểm tra, em phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần mở Bài học, Ôn nền, Sửa lỗi hoặc Lời giải để trợ giúp, hãy kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước. Nếu vào thẳng một phần hỗ trợ, chọn câu hoặc hoạt động em muốn trở về.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Hoàn tất lượt chính khi bài làm tự lực cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và những lỗi cản trở việc học tiếp đã được kiểm lại bằng câu phù hợp chưa gặp trước đó. Dùng bảng sau **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)** để xem từng mục tiêu, không chỉ đếm đáp số đúng. Nếu chưa có câu mới phù hợp hoặc còn sai sau hỗ trợ, ghi rõ phần chưa xác nhận và tiếp tục phần độc lập đủ nền.

Khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn Ôn lại sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần. Em có thể học tiếp nội dung phù hợp trong khi chờ lịch ôn; kết quả làm được ngay sau học chưa cho biết em còn nhớ sau nhiều ngày.

Sửa lỗi

Giữ bài ban đầu và chỉ ra bước chưa đúng trước khi chọn câu. Đọc lại định nghĩa hoặc ví dụ để hiểu cách sửa, rồi tự làm bài kiểm tra lại tương ứng trước khi mở đáp án. Bài đã gặp trước đó có thể dùng để ôn cách làm, nhưng không được tính là một bài mới để tự kiểm tra. Nếu một nhiệm vụ có nhiều ý, kết quả của mỗi ý chỉ cho biết phần kiến thức mà ý đó kiểm tra. Sau khi đối chiếu, ghi phần tự làm được và phần còn vướng khi cần lưu kết quả; quay lại bài hoặc Điểm dừng đã đưa em đến đây. Nếu không còn bài phù hợp chưa gặp trước đó, xem hướng dẫn khi hết bài mới (trang 15).

Chọn bài theo dấu hiệu

Mỗi dòng dưới đây chỉ ra một điều cần phân biệt để hiểu bài vững hơn. Đối chiếu với bài làm của em, thử trả lời câu hỏi rồi xem lại phần học được dẫn khi cần. Chọn đúng bài và đúng ý theo nơi phát hiện; nếu đang học Bài học, có thể dùng nhóm Sau Luyện tập. Chỉ tự kiểm tra bằng bài phù hợp chưa gặp trước đó; trong lượt Kiểm tra phải kết thúc lượt trước khi dùng hỗ trợ.

Nút thất nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Điểm bị loại và tiệm cận đứng	Thấy mẫu bằng 0 rồi kết luận có tiệm cận đứng; sau rút gọn lại thêm điểm đã loại.	Giới hạn tại điểm bị loại là hữu hạn hay vô cực? Giữ tập xác định ban đầu và xét giới hạn theo phía được phép; điểm bị loại chưa đủ để kết luận tiệm cận. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận (trang 9). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực (ý a) (trang 11). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu (ý a) (trang 13).
Dấu và hướng của giới hạn một phía	Gán hai phía trái dấu một cách máy móc hoặc nhầm dấu vô cực.	Tử và mẫu mang dấu gì ở mỗi phía? Xét dấu biểu thức ở từng phía, kể cả khi mẫu có lũy thừa chẵn. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 36 – Dấu ở hai phía (trang 9). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực (ý b) (trang 11). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu (ý b) (trang 13).
Hai đầu vô cực và số đường tiệm cận ngang	Chỉ xét một đầu, hoặc đếm hai giới hạn bằng nhau thành hai đường khác nhau.	Mỗi đầu được phép xét cho đường ngang nào? Ghi riêng hướng và giới hạn; hai kết quả trùng nhau chỉ xác định một đường ngang. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm (ý a) (trang 9). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm (ý a) (trang 11). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu (ý c) (trang 13).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Phần thương, phần dư và giới hạn của hiệu	Bỏ hằng số của thương, chia sai hoặc chỉ tìm hệ số góc.	Hiệu giữa hàm số và cả đường thẳng dự kiến có tiến về 0 không? Kiểm phép chia bằng phép nhân, giữ phần dư và kiểm giới hạn của hiệu khi $x \rightarrow -\infty$ hoặc $x \rightarrow +\infty$ theo phía đang xét. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình (ý a) (trang 10). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình (ý a) (trang 12). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý a) (trang 14).
Giao điểm hữu hạn và hành vi ở vô cực	Bác tiệm cận ngang vì đồ thị cắt đường đó.	Giao điểm ở một vị trí hữu hạn có phủ định giới hạn ở xa không? Kiểm riêng giới hạn và phương trình giao điểm; hai câu hỏi có thể cùng có câu trả lời đúng. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm (ý b) (trang 9). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm (ý b) (trang 11). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý b) (trang 14).
Mức tiến tới và mức đạt được	Đọc mức giới hạn thành giá trị mà mô hình đạt tại một thời điểm.	Có giá trị biến nào thỏa điều kiện làm hàm số bằng mức đó không? Giải câu hỏi về sự đạt được trong tập được phép; giới hạn không thay cho giá trị tại một điểm. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình (ý b) (trang 10). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình (ý b) (trang 12). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý c) (trang 14).
Công thức mở rộng và phạm vi mô hình	Dùng thời gian, sản lượng hoặc hướng tiến không được mô hình cho phép.	Những giá trị của biến đang dùng có nằm trong điều kiện đề bài không? Giữ tập đang xét và đơn vị; không gán tiệm cận cho phía mà đồ thị của mô hình không thể tiến tới. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình (ý b) (trang 10). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình (ý b) (trang 12). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý c) (trang 14).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Một phía vô cực và hai phía khác nhau	Dùng phía có giới hạn hữu hạn để bác tiệm cận đứng do phía còn lại tạo ra.	Có ít nhất một phía được phép xét cho giới hạn vô cực không? Đọc riêng từng nhánh; không yêu cầu hai phía đều vô cực hoặc phải trái dấu. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh (trang 10). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia (trang 12). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 14).
Giá trị gán tại mốc và hành vi lân cận	Dùng điểm kín được gán tại mốc để bác tiệm cận đứng.	Thay riêng giá trị tại mốc có làm đổi hành vi ở gần mốc không? Phân biệt giá trị tại điểm và giới hạn một phía. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 35, ý b (trang 9). Sau Kiểm tra: có thể dùng cùng ý b nếu thực sự chưa gặp trước đó; nếu đã gặp, chưa có bài mới tương ứng. Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46, ý b (trang 14).
Đường thẳng tiệm cận và số giới hạn	Chỉ ghi một số hoặc đọc sai hướng của đường xiên trên hình.	Đã viết phương trình đường thẳng và chỉ đúng nhánh, đúng hướng chưa? Phân biệt đường đứng, ngang, xiên; kết luận bằng dữ kiện giới hạn, dùng hình để đối chiếu. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh (trang 10). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia (trang 12). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 14).
Hình minh họa và căn cứ kết luận	Chỉ nhìn nét vẽ để đoán tiệm cận hoặc bỏ cả phần đúng khi chưa lập luận.	Dữ kiện giới hạn nào chứng minh từng kết luận? Giữ những bước có căn cứ; sửa đúng bước thiếu điều kiện hoặc đọc quá dữ kiện. Xem lại kiến thức (mở trên trang học liệu).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh (trang 10). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia (trang 12). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 14).

Riêng lỗi dùng một giá trị được gán tại mốc để bác tiệm cận đứng, trong Bài học hoặc Luyện tập hãy tự làm ý b chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận (trang 9). Nếu lỗi được phát hiện sau Kiểm tra, vẫn có thể dùng ý ấy khi thực sự chưa gặp trước đó vì nó thuộc nhóm trước; nếu đã gặp trước đó thì ghi chưa xác nhận. Sau Ôn lại, dùng ý b chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 14). Không lấy việc làm đúng câu về điểm bị loại thay cho tình huống giá trị đã được gán riêng.

Các câu đọc hình của ba nhóm là ba nhiệm vụ riêng. Dùng đúng nhóm theo nơi phát hiện; không dùng sớm bài Kiểm tra, Ôn lại hoặc Sửa lỗi của giai đoạn sau để lấp chỗ thiếu. Một câu đã gặp không trở thành câu mới sau nhiều ngày. Nếu câu của nhóm phù hợp đã gặp trước đó hoặc còn sai, dùng hướng dẫn khi hết câu mới (trang 15).

Đọc lỗi để biết cần xem lại gì

- **Điểm loại chưa phải tiệm cận.** Xem **Ví dụ 01 (mở trên trang học liệu)**; rút gọn không thêm điểm vào tập xác định. Sau đó tự làm câu về điểm bị loại trong bảng.
- **Dấu vô cực đến từ dấu biểu thức.** Xem **nền một phía (mở trên trang học liệu)**, kiểm tử và mẫu trước khi kết luận. Mẫu bình phương có thể làm hai phía cùng dấu.
- **Hai dấu là hai câu hỏi.** Xem **mục 2 (mở trên trang học liệu)**; ghi tách $+\infty$ và $-\infty$. Chỉ xét hướng tập xác định cho phép; trùng kết quả thì chỉ có một đường ngang.
- **Thương chưa đủ nếu chia sai hoặc bỏ hằng số.** Kiểm tra phép chia bằng phép nhân ở **nền biến đổi (mở trên trang học liệu)**, rồi kiểm tra giới hạn của hiệu với cả $ax + b$ theo **mục 4 (mở trên trang học liệu)**.
- **Giao điểm hữu hạn không bác giới hạn ở xa.** Xem lại định nghĩa ngang; phải kiểm giới hạn và giải phương trình giao điểm, không chỉ nhìn hình.
- **Giữ điều kiện của mô hình.** Xem **Ví dụ 07 (mở trên trang học liệu)**. Chỉ xét giới hạn mà các giá trị của biến thỏa điều kiện đề bài cho phép. Muốn kết luận một mức được đạt, kiểm tra xem có giá trị nào của biến thỏa điều kiện để hàm số bằng mức ấy hay không.

Sau mỗi lỗi, tự hỏi: “Tập xác định có cho phép hướng này không?”, “Giới hạn nào quyết định kết luận?”, “Mình đang giữ phần đúng nào?”, “Câu mới vừa làm thực sự xác nhận điều gì?”. Những câu hỏi ấy giúp dùng đúng giải thích phía trên.

Nếu lỗi được phát hiện ngay trong Bài học, em cũng có thể dùng câu sửa phù hợp chưa gặp trước đó ở nhóm Sau Luyện tập và trở về câu Bài học đang vướng; không cần chờ làm Kiểm tra mới được sửa.

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận

Dùng khi: rút gọn làm mất điểm bị loại (ý a), hoặc dùng giá trị tại mốc để bác tiệm cận đứng (ý b).

- a) Với $u(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$, ghi tập xác định, tính giới hạn tại 7 và kiểm $x = 7$ có là tiệm cận đứng không. Có thể gán $u(7) = 14$ sau rút gọn không?
- b) Hàm v xác định trên $\mathbb{R}$, có $v(-1) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) = -\infty$. Một bạn nói: “Điểm $(-1; 4)$ thuộc đồ thị, nên $x = -1$ không thể là tiệm cận đứng.” Hãy giữ phần đúng, chỉ bước sai và viết lại kết luận có căn cứ. Dữ kiện có quyết định giới hạn phải tại -1 không?

Tiêu chí xác nhận: ý a giữ tập xác định và phân biệt giới hạn hữu hạn với giá trị tại điểm bị loại; ý b giữ điểm trên đồ thị, dùng giới hạn trái vô cực và không suy thêm về phía phải. Mỗi ý chỉ xác nhận tình huống mà ý ấy kiểm.

Sau đối chiếu: nếu ý a còn sai, xem [Giới hạn và giá trị \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc [Biến đổi phân thức \(mở trên trang học liệu\)](#) tùy nguyên nhân; nếu ý b còn sai, xem [Tiệm cận đứng \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc [Giới hạn một phía \(mở trên trang học liệu\)](#). Sau đó, dùng hướng dẫn chung của phần Sửa lỗi (trang 5) để ghi kết quả và quay về bài đang làm. Có thể quay lại [Điểm dừng 02 \(mở trên trang học liệu\)](#), [Điểm dừng 03 \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc câu Bài học đang làm trước khi mở hỗ trợ.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\).](#)

Nhiệm vụ 36 – Dấu ở hai phía

Dùng khi: nhầm dấu hoặc phía.

Tính hai giới hạn một phía của $v(x) = -\frac{4}{x-6}$ tại 6. Nêu tiệm cận đứng và giải thích dấu.

Tiêu chí xác nhận: giải thích dấu tử/mẫu ở từng phía và dùng đúng định nghĩa đường đứng.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, [xem lại phần liên quan \(mở trên trang học liệu\)](#). **Quay lại:** [Điểm dừng 02 \(mở trên trang học liệu\)](#), [Điểm dừng 03 \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc câu Bài học đã gọi.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\).](#)

Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm

Dùng khi: bỏ một đầu hoặc cho rằng đồ thị không thể cắt tiệm cận.

- a) Biết giới hạn của f bằng -6 ở $+\infty$ và 4 ở $-\infty$. Ghi hai tiệm cận ngang theo hướng.
- b) Với $g(x) = 2 + \frac{x+1}{x^2+2}$, chứng minh một tiệm cận ngang và tìm giao điểm của đồ thị với nó.

Tiêu chí xác nhận: ý a ghi đường theo từng đầu; ý b có giới hạn, giao điểm và lí do không mâu thuẫn.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, [xem lại phần liên quan \(mở trên trang học liệu\)](#). **Quay lại:** [Điểm dừng 02 \(mở trên trang học liệu\)](#), [Điểm dừng 03 \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc câu Bài học đã gọi.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\).](#)

Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình

Dùng khi: thiếu hệ số tự do hoặc bỏ điều kiện của mô hình.

- a) Tìm tiệm cận xiên của $f(x) = \frac{x^2+4x+9}{x+1}$, kiểm bằng giới hạn hiệu.
- b) Với mô hình giả định $a(t) = 8 + \frac{10}{t+5}$, trong đó $t \geq 0$ tính bằng giờ và $a(t)$ tính bằng độ C, hãy tính giới hạn khi $t \rightarrow +\infty$ và giải thích ý nghĩa. Có thời điểm nào trong mô hình để $a(t) = 8$ không? Đường $t = -5$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị trong mô hình này không? Vì sao?

Tiêu chí xác nhận: ý a kiểm phép chia và giới hạn hiệu; ý b giữ điều kiện của biến, đơn vị và xét sự đạt được.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem [Biến đổi phân thức \(mở trên trang học liệu\)](#) để kiểm phép chia và [Tiệm cận xiên \(mở trên trang học liệu\)](#) để kiểm tra giới hạn của hiệu; nếu sai ý b, xem [Tập đang xét và bối cảnh \(mở trên trang học liệu\)](#). **Quay lại:** [Điểm dừng 02 \(mở trên trang học liệu\)](#), [Điểm dừng 03 \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc câu Bài học đã gọi.

Xem lời giải ([mở trên trang học liệu](#)).

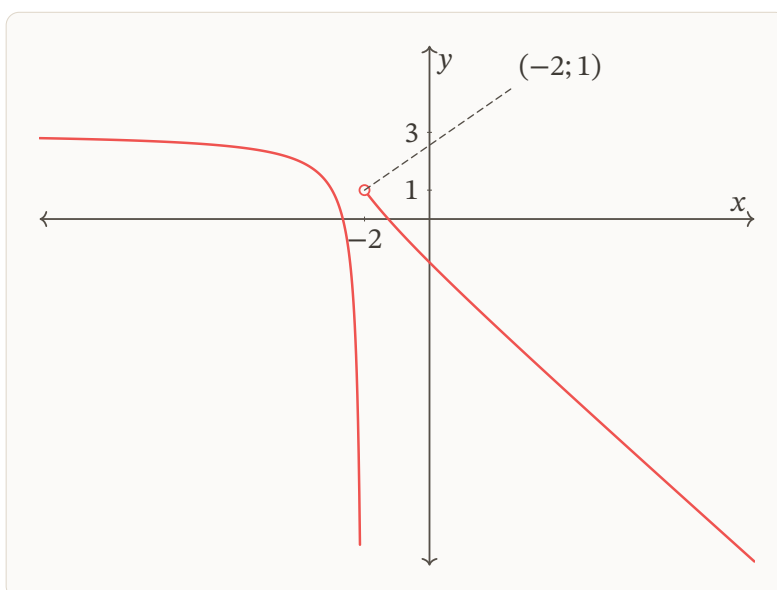
Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh

Dùng khi: đọc nhầm nhánh, hướng đường xiên hoặc dùng điểm hở để bác đường đứng.

Hàm f xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Hình đi kèm dữ kiện chính xác:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0.$$



Hình 1

- a) Viết các tiệm cận suy ra từ dữ kiện; chỉ đúng nhánh và hướng trên hình. Ở đầu phải, nhánh tiến gần đường xiên đi lên hay đi xuống? Nêu giới hạn hiệu làm căn cứ.
- b) Một bạn dùng điểm hở $(-2; 1)$ để bác tiệm cận đứng tại mốc. Chỉ ra bước sai; giới hạn phải hữu hạn có quyết định giới hạn trái không?

Tiêu chí xác nhận: chỉ đúng đường ngang ở đầu trái, đường đứng từ phía trái và đường xiên đi xuống ở đầu phải; giữ giới hạn từng phía, kiểm giới hạn hiệu và không gán giá trị ở điểm hở. Nếu chỉ đọc đúng ngang/đứng, chưa xác nhận phần đọc hình xiên.

Xem lại khi cần: Nếu nhầm nhánh hoặc phía tạo đường đứng, xem **Tiệm cận đứng** (mở trên trang học liệu) và **Giới hạn một phía** (mở trên trang học liệu); nếu nhầm đường xiên, xem **Tiệm cận xiên** (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 02 (mở trên trang học liệu), Điểm dừng 03 (mở trên trang học liệu) hoặc câu Bài học đã gọi.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực

Dùng khi: lần điểm bị loại, giới hạn hữu hạn và vô cực.

- a) Xét riêng mốc 8 cho $p(x) = \frac{x^2-64}{x-8}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa; kết luận về giá trị tại điểm và đường đứng.
- b) Tính hai giới hạn của $q(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ tại -2 , rồi kết luận đường đứng.

Tiêu chí xác nhận: xử lý riêng từng hàm; ý a giữ tập xác định, ý b giải thích dấu mẫu bình phương.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem **Giới hạn và giá trị** (mở trên trang học liệu); nếu sai ý b, xem **Giới hạn một phía** (mở trên trang học liệu) và **Tiệm cận đứng** (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (mở trên trang học liệu).

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm

Dùng khi: bỏ một đầu hoặc nhầm giao điểm với giới hạn ở xa.

- a) Biết giới hạn của f bằng 6 ở $+\infty$ và -7 ở $-\infty$. Ghi các đường ngang.
- b) Với $g(x) = -3 + \frac{x-4}{x^2+5}$, kiểm $y = -3$ là tiệm cận ngang và tìm giao điểm của đồ thị với nó; giải thích vì sao hai kết quả cùng đúng.

Tiêu chí xác nhận: xét đủ hai đầu ở ý a; có giới hạn và giao điểm hợp lệ ở ý b.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, xem lại phần liên quan (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (mở trên trang học liệu).

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình

Dùng khi: chọn sai phần tuyến tính hoặc ngoại suy vượt tập đang xét.

- a) Tìm tiệm cận xiên của $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 6}{x - 1}$; kiểm bằng giới hạn của hiệu.
- b) Một mô hình giả định $b(t) = 7 + \frac{14}{t+6}$, với b tính bằng mg L^{-1} , chỉ được cho trong 30 phút đầu: $0 \leq t \leq 30$. Một bạn kết luận “đồ thị mô hình có tiệm cận ngang $b = 7$ khi $t \rightarrow +\infty$ ”. Kết luận ấy có theo được từ điều kiện chỉ xét $0 \leq t \leq 30$ không? Nếu bổ sung giả thiết dùng cùng công thức cho mọi $t \geq 0$, hãy nêu mức tiến tới và kiểm việc đạt mức ấy trong mô hình mở rộng.

Tiêu chí xác nhận: ý a kiểm tra giới hạn của hiệu; ý b phân biệt đoạn đang xét với giả thiết mở rộng được bổ sung.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem **Biến đổi phân thức** (mở trên trang học liệu) và **Tiệm cận xiên** (mở trên trang học liệu); nếu sai ý b, xem **Tập đang xét và bối cảnh** (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (mở trên trang học liệu).

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

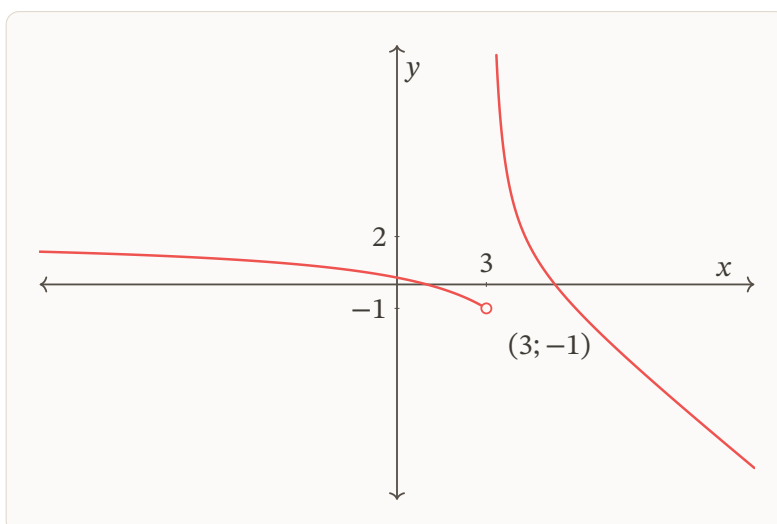
Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia

Dùng khi: nhầm nhánh, hướng đường xiên hoặc vai trò điểm hở.

Hình sau thuộc một hàm xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Các dữ kiện chính xác đi kèm là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = 0.$$



Hình 2

- a) Viết các tiệm cận suy ra từ dữ kiện. Trên hình, chỉ nhánh và hướng tương ứng với từng đường; với dấu phải, chỉ rõ nhánh đang tiến gần một đường xiên đi lên hay đi xuống.

- b) Giải thích điểm hở trên nhánh trái nói gì về giới hạn trái và giá trị tại mốc. Thông tin ấy có bác được tiệm cận đứng từ phía phải không?
- c) Kiểm nhận định “Có điểm hở nên không thể có tiệm cận đứng ở cùng hoành độ”.

Tiêu chí xác nhận: nối đúng mỗi giới hạn với phần hình tương ứng, giải thích vì sao một phía đủ.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, **xem lại phần liên quan** (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (mở trên trang học liệu).

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu

Dùng khi: tái diễn lỗi tập xác định, dấu hoặc bỏ đầu vô cực.

- a) Xét mốc 9 của $u(x) = \frac{x^2-81}{x-9}$: tập xác định, giới hạn, giá trị tại điểm và đường đứng.
- b) Tính hai giới hạn của $v(x) = \frac{5}{x+4}$ tại -4 , kết luận đường đứng.
- c) Một hàm có giới hạn 8 ở $+\infty$ và -9 ở $-\infty$. Ghi đường ngang theo hướng.

Tiêu chí xác nhận: đối chiếu từng ý; không lấy đúng một ý làm xác nhận các ý còn lại.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem **Giới hạn và giá trị** (mở trên trang học liệu); nếu sai ý b, xem **Giới hạn một phía** (mở trên trang học liệu) và **Tiệm cận đứng** (mở trên trang học liệu); nếu sai ý c, xem **Giới hạn ở vô cực** (mở trên trang học liệu) và **Tiệm cận ngang** (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu), Điểm dừng 06 (mở trên trang học liệu) hoặc Điểm dừng 07 (mở trên trang học liệu) đã gọi.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải

Dùng khi: quên kiểm phần dư, giao điểm hoặc dấu phần dư trong mô hình.

- a) Tìm tiệm cận xiên của $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 7}{x - 1}$, kiểm bằng giới hạn của hiệu.
- b) Với $g(x) = 4 + \frac{x+2}{x^2+7}$, tìm tiệm cận ngang và giao điểm của đồ thị với đường ấy.
- c) Trong mô hình giả định $c(t) = 3 - \frac{16}{t+7}$, với c tính bằng mg L^{-1} và $t \geq 0$ tính bằng giờ, nêu mức tiến tới và việc đạt mức ấy. Có thể từ giới hạn bằng 3 mà kết luận $c(t) > 3$ không? Kiểm vai trò của mốc -7 .

Tiêu chí xác nhận: phân biệt ba mục tiêu; diễn giải đúng việc tiến gần từ phía nào và việc đạt mức.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem **Biến đổi phân thức** (mở trên trang học liệu) và **Tiệm cận xiên** (mở trên trang học liệu); nếu sai ý b, xem **Tiệm cận ngang** (mở trên trang học liệu), đặc biệt Ví dụ 04; nếu sai ý c, xem **Tập đang xét và bối cảnh** (mở trên trang học liệu). **Quay lại:** Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu), Điểm dừng 06 (mở trên trang học liệu) hoặc Điểm dừng 07 (mở trên trang học liệu) đã gọi.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu).

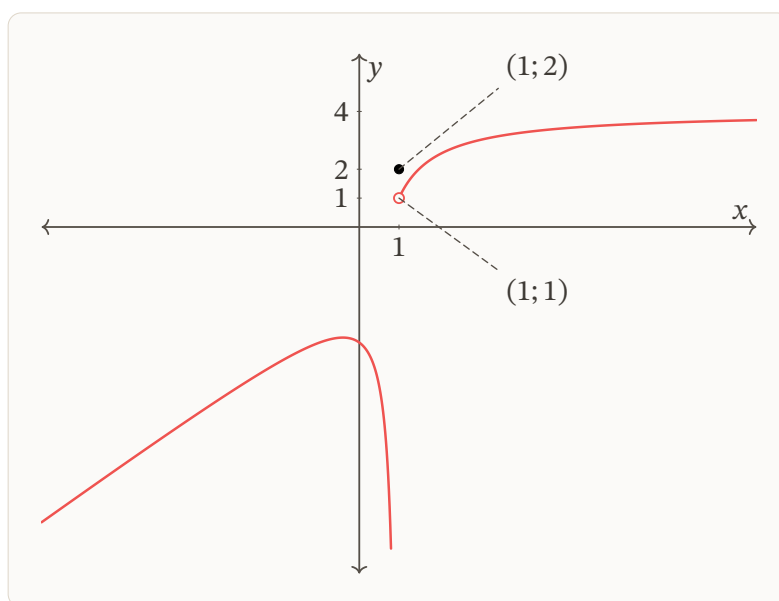
Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau

Dùng khi: nhầm điểm kín với giới hạn hoặc áp một đầu cho cả hai đầu.

Hàm g xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, có $g(1) = 2$. Dữ kiện chính xác kèm hình là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x - 2)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4.$$



Hình 3

- a) Nêu các tiệm cận, chỉ nhánh và hướng tương ứng. Không áp kết quả của đầu trái cho đầu phải.
- b) Phân biệt điểm kín $(1; 2)$, điểm hở $(1; 1)$ và giới hạn trái. Việc $g(1)$ được xác định có bác được tiệm cận đứng không?
- c) Chỉ từ dữ kiện tiệm cận, có xác định duy nhất toàn bộ đồ thị không? Nêu giới hạn của kết luận.

Tiêu chí xác nhận: đọc đúng cả hai nhánh, tách giá trị tại mốc khỏi giới hạn và không suy duy nhất đồ thị.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, [xem lại phần liên quan \(mở trên trang học liệu\)](#). **Quay lại:** Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu), Điểm dừng 06 (mở trên trang học liệu) hoặc Điểm dừng 07 (mở trên trang học liệu) đã gọi.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#).

Sau câu xác nhận và khi hết bài mới

Nếu tự làm đúng và giải thích được, ghi “đã xác nhận mục tiêu này trong lượt”, rồi trở về nhiệm vụ hoặc điểm dừng đã gọi hỗ trợ. Kết quả ấy không đổi điểm Kiểm tra ban đầu và chưa chứng nhận khả năng sau nhiều ngày.

Nếu đã xem đáp án, câu trở thành tài nguyên học. Chỉ chọn câu/ý khác cùng mục tiêu chưa gặp trước đó trong nhóm của giai đoạn đang học hoặc nhóm trước nếu phù hợp; giữ đúng nơi quay về. Không lấy câu của giai đoạn sau để dùng sớm, không coi đổi số bài là làm bài mới. Một câu chỉ tính tiệm cận không thay cho việc chỉ và giải thích đúng các nhánh trên hình.

Nếu các câu phù hợp đều đã gặp trước đó hoặc em vẫn chưa làm được, ghi rõ **chưa có đủ bằng chứng mới để xác nhận mục tiêu này**. Trở lại đoạn học hoặc nền đúng nguyên nhân; lưu yêu cầu bổ sung câu phù hợp khi trao đổi về bài học. Em có thể tiếp tục mục tiêu độc lập đã đủ nền. Không tự đánh dấu hoàn tất, không phải tự tìm một câu chưa được kiểm rồi coi là đã đạt.

Nếu vào thẳng một thẻ hỗ trợ mà chưa có bài đang làm, hãy chọn [Bài học \(mở trên trang học liệu\)](#), [Luyện tập \(mở trên trang học liệu\)](#) hoặc lượt [Ôn lại \(mở trên trang học liệu\)](#) phù hợp. Các liên kết [Điểm dừng 02 \(mở trên trang học liệu\)](#), [Điểm dừng 03 \(mở trên trang học liệu\)](#) và [Sau Kiểm tra \(mở trên trang học liệu\)](#) giúp em về đúng điểm đã chọn; không có một điểm quay về cố định cho tất cả người học.

Nguồn

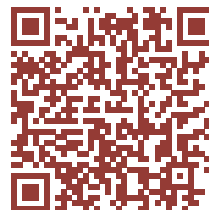
- Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, trang 106: yêu cầu về hình ảnh tiệm cận ngang, đứng, xiên và quan hệ với khảo sát đồ thị.
- Toán 12, tập một, Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 3, trang 20–25: đối chiếu định nghĩa và phương pháp cơ bản. Bản PDF tham khảo tương ứng trang 22–27.
- Các gói **Đơn điệu và cực trị** và **Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của ZO Math: mạch tập xác định, biểu diễn và sự đạt được. Nhật kí và tài nguyên nền chung được dẫn tại nơi sử dụng.

Các nhiệm vụ, dữ kiện số và mô hình giả định trong học liệu được biên soạn cho gói này. Hình được dựng từ công thức của từng hình; hình trong câu đọc đồ thị đi cùng dữ kiện giới hạn để có căn cứ kết luận chính xác. Gói không khẳng định tần suất xuất hiện của tiệm cận trong đề thi 2027.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học