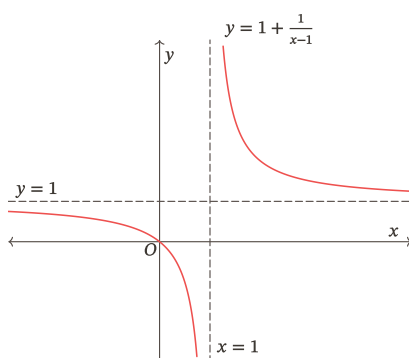


Đường tiệm cận

Luyện tập

Các nhiệm vụ luyện tập, không kèm lời giải.



Mở trang Đường tiệm cận

R1-G03

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học	2
Chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học	3
Khi cần hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	4
Luyện tập	5
Chặng 1 — Tập xác định, hướng và các đường ngang/đứng	5
Điểm dừng 02	6
Chặng 2 — Phần dư, hình đồ thị và mô hình	7
Điểm dừng 03	8
Phối hợp — lựa chọn thêm	9
Chuyển giao — lựa chọn thêm	9
Nguồn	10

Bắt đầu

Học liệu “Đường tiệm cận” giúp em dùng giới hạn để xác định tiệm cận đứng, ngang và xiên của đồ thị hàm số. Em sẽ tập xét đúng tập xác định, phân biệt các phía tiến tới và dùng giới hạn để giải thích hình vẽ. Với bài toán thực tế, kết luận phải phù hợp với điều kiện và đơn vị mà mô hình đã cho. Bài Kiểm tra đánh giá mục tiêu của học liệu, không mô phỏng cấu trúc đề thi tốt nghiệp.

Một điểm bị loại khỏi tập xác định có luôn tạo ra tiệm cận đứng không? Đồ thị đã cắt một đường thẳng còn có thể tiến sát đường ấy ở rất xa không? Hai đầu của cùng một đồ thị có thể tiến sát hai đường khác nhau không?

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Giữ tập xác định và phân biệt giới hạn với giá trị	Giữ đúng tập xác định; phân biệt giá trị tại một điểm với hành vi của hàm số khi biến tiến gần điểm ấy.
Tìm tiệm cận ngang	Xét riêng hai đầu vô cực, nêu phương trình và hướng tương ứng; không đếm trùng đường.
Tìm tiệm cận đứng	Dùng ít nhất một giới hạn một phía vô cực hợp lệ; giữ đúng dấu và phía.
Tìm tiệm cận xiên	Tìm đủ phương trình đường thẳng, kiểm phần chênh lệch tiến về 0 ở hướng đang xét và nối kết quả với hình.
Nối dữ kiện với hình	Nối công thức, dữ kiện giới hạn và nhánh đồ thị; giải thích vì sao đồ thị có thể cắt đường tiệm cận.
Diễn giải mô hình	Chọn kết luận vừa đủ dữ kiện và diễn giải kết quả trong mô hình được cho, đúng điều kiện và đơn vị.
Đánh giá và sửa lập luận	Giữ phần đúng, sửa đúng lý do; khi cần xác nhận sau sửa, tự làm câu phù hợp còn chưa xem lời giải.

Tiên quyết

Em cần biến đổi được phân thức, xét dấu đơn giản và đọc kí hiệu giới hạn. Các nhiệm vụ **Khởi động (mở trên trang học liệu)** giúp em tự kiểm bốn thao tác nền này trước khi vào phần học. Nếu thiếu thao tác nào, dùng đúng phần **Ôn nền (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Đạo hàm không bắt buộc trong các nhiệm vụ chính.

Nhánh Phối hợp (trang 9) cần kiến thức về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên tập đang xét. Nhánh Chuyển giao (trang 9) cần đọc được giới hạn chứa căn và trị tuyệt đối. Hai nhánh là lựa chọn thêm.

Cách học

Chuẩn bị giấy để giữ bài tự làm và ghi lí do cho từng kết luận. Tự trả lời trước khi mở phần đối chiếu. Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi; riêng một lượt Kiểm tra phải thực hiện liên tục theo hướng dẫn của phần ấy. Khởi động chỉ khảo sát một số thao tác nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc chứng nhận đạt cả gói.

Nếu cần học từ đầu, làm **Khởi động (mở trên trang học liệu)**, rồi đọc **Giới hạn mô tả hành vi của hàm số (mở trên trang học liệu)**. Ở mỗi mục kiến thức, thử trả lời Gợi mở trước khi đọc phần giải thích; Gợi mở không thay nhiệm vụ cuối mỗi mục. Câu Nhiệm vụ trong Bài học có lời giải riêng.

Chọn nơi bắt đầu

- Cần học hoặc nhớ lại khái niệm: vào **Bài học (mở trên trang học liệu)**.
- Đã hiểu và muốn tự làm: vào Luyện tập (trang 5).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)**, kể cả chưa làm các phần trước.
- Đến ngày hẹn: chọn lượt ở **Ôn lại (mở trên trang học liệu)**.

Đó là các điểm vào theo nhu cầu. Việc bỏ qua một phần không tự cho biết em đã làm chủ phần ấy.

Bản đồ học

Bài học (mở trên trang học liệu) → Luyện tập (trang 5) → **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)** → **Ôn lại (mở trên trang học liệu)**

Đây là tiến trình được khuyến nghị và thứ tự tra đọc. Em được chọn điểm vào, đi tới hoặc quay lại theo nhu cầu; không phải hoàn tất lần lượt mọi phần mới được vào phần tiếp theo. Phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại thực hiện theo ngày hẹn.

Ôn nền, Lời giải, Sửa lỗi và Nhật kí là các hỗ trợ được gọi khi cần, theo bảng dưới. Sau hỗ trợ, trở về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Khi cần hỗ trợ

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Nhớ lại một khái niệm của gói	Đúng mục trong Bài học (mở trên trang học liệu)	Trở về câu đang vướng
Bổ sung cách đọc giới hạn hoặc biến đổi	Đúng phần Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu nền rồi trở về bài gốc
Đối chiếu hoặc sửa bài đã làm	Lời giải (mở trên trang học liệu) , rồi Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) nếu cần	Kiểm đúng phần còn sai bằng câu phù hợp chưa xem đáp án
Lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi dữ kiện đã có, không cần ghi sau mọi thao tác

Giữ bài tự làm trước khi mở trợ giúp; khi đối chiếu, xem cả lí do và kết luận. Nếu đã nhận trợ giúp, ghi riêng phần làm được sau đó. Câu đã xem đáp án dùng để học lại, không tính là lần tự làm mới.

Riêng trong một lượt Kiểm tra, em phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần mở Bài học, Ôn nền, Sửa lỗi hoặc Lời giải để trợ giúp, hãy kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước. Nếu vào thẳng một phần hỗ trợ, chọn câu hoặc hoạt động em muốn trở về.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Hoàn tất lượt chính khi bài làm tự lực cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và những lỗi cản trở việc học tiếp đã được kiểm lại bằng câu phù hợp chưa gặp trước đó. Dùng bảng sau **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)** để xem từng mục tiêu, không chỉ đếm đáp số đúng. Nếu chưa có câu mới phù hợp hoặc còn sai sau hỗ trợ, ghi rõ phần chưa xác nhận và tiếp tục phần độc lập đủ nền.

Khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn Ôn lại sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần. Em có thể học tiếp nội dung phù hợp trong khi chờ lịch ôn; kết quả làm được ngay sau học chưa cho biết em còn nhớ sau nhiều ngày.

Luyện tập

Hãy tự làm trước khi mở lời giải. Khi vướng, xác định em chưa hiểu khái niệm hay chưa làm được thao tác nền, rồi chọn đúng phần hỗ trợ cần mở. Việc xem lại không bắt em phải học lại từ đầu. Giữ bài ban đầu để thấy phần nào đã tự làm được.

Chặng	Trọng tâm luyện tập	Nhiệm vụ và Điểm dừng
Tập xác định, hướng và ngang/đứng	Giữ tập xác định; xét đúng phía; phân biệt đường ngang với đường đứng	Nhiệm vụ 11–15; Điểm dừng 02 (trang 6)
Phần dư, hình và mô hình	Kiểm đường xiên; đọc đúng nhánh; giữ điều kiện của biến và đơn vị của mô hình	Nhiệm vụ 16–20; Điểm dừng 03 (trang 8)

Nếu chưa làm được thao tác nền, mở đúng thẻ Ôn nền và tự làm câu của thẻ trước khi trở về. Nếu đã hiểu kiến thức nhưng lập luận chưa đúng, giữ bài ban đầu, tìm bước sai rồi dùng hướng dẫn trong **Sửa lỗi (mở trên trang học liệu)**. Trên bản in có lời giải, tra đúng tên nhóm và số nhiệm vụ; trên màn hình, dùng liên kết của câu đang làm.

Chặng 1 – Tập xác định, hướng và các đường ngang/đứng

Mục tiêu: giữ điểm loại sau rút gọn; xét đúng phía và từng đầu vô cực; giải thích được điều kiện tiệm cận đứng. Làm các nhiệm vụ 11–15 rồi đối chiếu tại Điểm dừng 02.

Nhiệm vụ 11 – Từ giới hạn đến đường thẳng

Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định, có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Viết các tiệm cận ngang và đứng của đồ thị. Mỗi kết luận cần kèm dữ kiện quyết định. Hai giới hạn ở vô cực cho một hay hai đường ngang?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 12 – Tìm tập xác định trước khi tính

Tìm các tiệm cận ngang, đứng của $f(x) = \frac{5x+2}{x-3}$. Ghi tập xác định và tính giới hạn một phía tại điểm bị loại.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 13 – Một điểm hở

Cho $u(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa. Kiểm nhận định “ $x = 3$ là tiệm cận đứng”. Nếu rút gọn được $u(x) = x + 3$, em có được viết $u(3) = 6$ không? Bài này chỉ yêu cầu xét mốc $x = 3$.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 14 – Chỉ có một phía để tiến gần

Cho $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ trên $D = (4; +\infty)$. Tìm tiệm cận ngang, đứng của đồ thị. Giải thích vì sao không phải xét $x \rightarrow 4^-$.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 15 – Không bỏ sót đầu trái

Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. Viết các đường tiệm cận ngang và ghi đường nào ứng với đầu trái, đầu phải. Có thể chỉ từ hai dữ kiện này kết luận rằng đồ thị không có tiệm cận đứng không?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Điểm dừng 02

Xem lời giải (mở trên trang học liệu) rồi đối chiếu bài làm. Kiểm ba điều: em giữ tập xác định ở nhiệm vụ 13–14; ghi đúng đường/hướng ở nhiệm vụ 11–12 và 05; hiểu vì sao một phía đủ trong nhiệm vụ 14.

- Nếu cả kết luận và lí do đều đúng, em có thể sang chặng 2 hoặc chọn hoạt động phù hợp khác.
- Nếu nhầm điểm loại, gọi **Nhiệm vụ 35 của Sửa lỗi sau Luyện tập** (mở trên trang học liệu).
- Nếu nhầm dấu/phía, xem **nền giới hạn một phía** (mở trên trang học liệu), rồi dùng **Nhiệm vụ 36 của Sửa lỗi sau Luyện tập** (mở trên trang học liệu) nếu câu chưa gặp trước đó.
- Nếu bỏ sót đầu trái, xem lại mục 2 và dùng **Nhiệm vụ 37(a) của Sửa lỗi sau Luyện tập** (mở trên trang học liệu).

Sau hỗ trợ, trở lại Điểm dừng này và kiểm đúng tiêu chí còn thiếu. Bài đã xem lời giải vẫn dùng để học, nhưng không tính là kết quả tự làm một bài mới. Không cần vào tất cả nhánh khi đã đạt.

Nếu còn vướng tập xác định hoặc giới hạn một phía, chưa ghi đã đạt phần ấy. Em vẫn có thể làm phần độc lập mà mình đủ nền; phần cần thao tác đang thiếu phải được học lại trước khi kết luận đã làm chủ. Khi câu xác nhận phù hợp đã gặp trước đó hoặc còn sai, dùng **quy tắc khi hết câu mới** (mở trên trang học liệu); không lấy để Kiểm tra hoặc Ôn lại để luyện trước.

Chặng 2 – Phần dư, hình đồ thị và mô hình

Mục tiêu: tìm đủ đường xiên; kiểm kết luận bằng giới hạn; nối dữ kiện với hình; diễn giải đúng điều kiện của biến. Số nhiệm vụ tiếp tục từ chặng trước.

Nhiệm vụ 16 – Thương và phần dư

Tìm các tiệm cận đứng, xiên của $f(x) = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$. Kiểm phép chia bằng cách lấy mẫu nhân với thương và cộng phần dư; sau đó kiểm giới hạn của hiệu với đường xiên.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 17 – Đừng bỏ mất hệ số tự do

Một bạn nói đồ thị $g(x) = \frac{2x^2-x+4}{x-2}$ có tiệm cận xiên $y = 2x$ vì “tỉ số hệ số cao nhất bằng 2”. Hãy kiểm nhận định này, tìm đường xiên đúng và chỉ rõ giới hạn nào bác đường $y = 2x$.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 18 – Cắt mà vẫn tiến sát

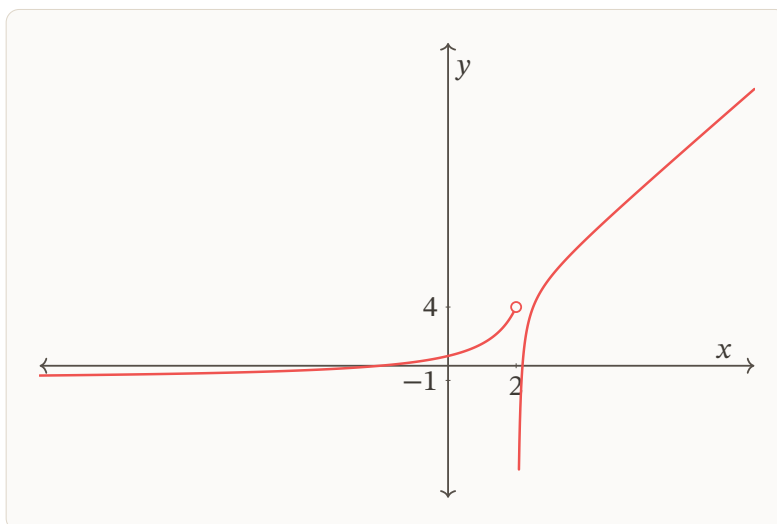
Cho $f(x) = 3 + \frac{x-1}{x^2+1}$. Chứng minh $y = 3$ là tiệm cận ngang, rồi tìm giao điểm của đồ thị với $y = 3$. Kết quả có mâu thuẫn với định nghĩa không?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 19 – Một hình, ba hành vi

Hình sau biểu diễn một hàm xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Hình đi kèm các dữ kiện chính xác:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0.$$



Hình 1

- Nêu các tiệm cận suy ra từ dữ kiện và chỉ vị trí/hướng tương ứng trên hình.
- Một bạn bác $x = 2$ là tiệm cận đứng vì giới hạn trái bằng 4. Bạn ấy sai ở đâu?
- Giải thích vì sao không dùng một đoạn đồ thị nhìn “gần thẳng” trong ảnh để thay phép kiểm giới hạn.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 20 – Nhiệt độ trong mô hình

Một mô hình giả định cho nhiệt độ sau t giờ là $h(t) = 6 + \frac{18}{t+2}$ (°C), $t \geq 0$.

- Nêu tiệm cận ngang và ý nghĩa trong mô hình.
- Có thời điểm hữu hạn nào nhiệt độ đúng bằng 6 °C không?
- Một bạn dùng mẫu $t + 2$ để gọi $t = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị mô hình. Hãy kiểm cách kết luận ấy.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Điểm dừng 03

Đối chiếu nhiệm vụ 16–20. Em cần kiểm phần dư ở 06–07, hiểu giao điểm trong 08, nối đúng cả ba hành vi ở 09 và giữ điều kiện của biến và đơn vị trong 10.

- Thiếu phần dư hoặc hệ số tự do: **Biến đổi phân thức** (mở trên trang học liệu), rồi **Nhiệm vụ 38(a)** của **Sửa lỗi sau Luyện tập** (mở trên trang học liệu).
- Cho rằng đồ thị không được cắt tiệm cận: xem lại định nghĩa, rồi **Nhiệm vụ 37(b)** của **Sửa lỗi sau Luyện tập** (mở trên trang học liệu).
- Diễn giải vượt tập đang xét hoặc nhầm mức đạt được: mục 5, rồi **Nhiệm vụ 38(b)** của **Sửa lỗi sau Luyện tập** (mở trên trang học liệu).

- Nếu nhầm cách đọc hình ở nhiệm vụ 19, xem lại cách nối dữ kiện với từng nhánh ở mục 5. Khi cần tự kiểm lại bằng hình khác, dùng **Nhiệm vụ 39 của Sửa lỗi sau Luyện tập (mở trên trang học liệu)** nếu chưa gặp trước đó, rồi trở về Điểm dừng này. Không dùng một câu ở nhiều nơi như thể đó là nhiều lần xác nhận khác nhau.

Khi đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin, em có thể làm Kiểm tra hoặc chọn nhánh tự chọn dưới đây. Quyền bắt đầu không có nghĩa các mục tiêu còn vướng đã đạt. Nếu chưa có câu mới phù hợp hoặc còn sai, ghi rõ mục tiêu chưa xác nhận và xem lại đúng phần; chỉ dùng kết quả của phần đã tự làm được. Không bắt làm hai nhánh thêm để được vào Kiểm tra.

Phối hợp – lựa chọn thêm

Nhiệm vụ 21 – Tiệm cận và giá trị không đạt

Chọn bài này nếu em đã học giá trị lớn nhất và nhỏ nhất hoặc có nền tương ứng. Với $C(x) = 2 + \frac{6}{x+1}$ trên $x \geq 0$, hãy tìm GTLN, GTNN nếu có và giải thích quan hệ với tiệm cận ngang.

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, **xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu)**, rồi trở lại nhiệm vụ này.

Chuyển giao – lựa chọn thêm

Nhiệm vụ 22 – Hai đường xiên khác nhau

Chọn bài này nếu em đọc được giới hạn căn và $\sqrt{x^2} = |x|$ ở phần nền. Với $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, hãy kiểm $y = x$ ở $+\infty$ và $y = -x$ ở $-\infty$ bằng cách nhân liên hợp. Có được lấy một đường làm đáp án cho cả hai đầu không?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu). Nếu cần, **xem lại đúng phần đang vướng (mở trên trang học liệu)**, rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nguồn

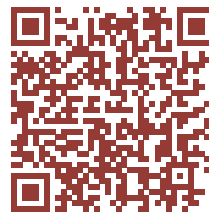
- Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, trang 106: yêu cầu về hình ảnh tiệm cận ngang, đứng, xiên và quan hệ với khảo sát đồ thị.
- Toán 12, tập một, Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 3, trang 20–25: đối chiếu định nghĩa và phương pháp cơ bản. Bản PDF tham khảo tương ứng trang 22–27.
- Các gói **Đơn điệu và cực trị** và **Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của ZO Math: mạch tập xác định, biểu diễn và sự đạt được. Nhật kí và tài nguyên nền chung được dẫn tại nơi sử dụng.

Các nhiệm vụ, dữ kiện số và mô hình giả định trong học liệu được biên soạn cho gói này. Hình được dựng từ công thức của từng hình; hình trong câu đọc đồ thị đi cùng dữ kiện giới hạn để có căn cứ kết luận chính xác. Gói không khẳng định tần suất xuất hiện của tiệm cận trong đề thi 2027.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học