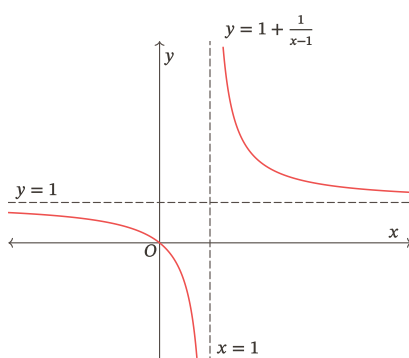


Đường tiệm cận

Lời giải và hướng dẫn chấm

Lời giải, đáp án và hướng dẫn chấm.



Mở trang Đường tiệm cận

R1-G03

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học	2
Chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học	3
Khi cần hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	4
Lời giải	5
Bài học	5
Luyện tập	9
Phối hợp	14
Chuyển giao	14
Kiểm tra	15
Ôn lại	19
Sửa lỗi	21
Nguồn	27

Bắt đầu

Học liệu “Đường tiệm cận” giúp em dùng giới hạn để xác định tiệm cận đứng, ngang và xiên của đồ thị hàm số. Em sẽ tập xét đúng tập xác định, phân biệt các phía tiến tới và dùng giới hạn để giải thích hình vẽ. Với bài toán thực tế, kết luận phải phù hợp với điều kiện và đơn vị mà mô hình đã cho. Bài Kiểm tra đánh giá mục tiêu của học liệu, không mô phỏng cấu trúc đề thi tốt nghiệp.

Một điểm bị loại khỏi tập xác định có luôn tạo ra tiệm cận đứng không? Đồ thị đã cắt một đường thẳng còn có thể tiến sát đường ấy ở rất xa không? Hai đầu của cùng một đồ thị có thể tiến sát hai đường khác nhau không?

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Giữ tập xác định và phân biệt giới hạn với giá trị	Giữ đúng tập xác định; phân biệt giá trị tại một điểm với hành vi của hàm số khi biến tiến gần điểm ấy.
Tìm tiệm cận ngang	Xét riêng hai đầu vô cực, nêu phương trình và hướng tương ứng; không đếm trùng đường.
Tìm tiệm cận đứng	Dùng ít nhất một giới hạn một phía vô cực hợp lệ; giữ đúng dấu và phía.
Tìm tiệm cận xiên	Tìm đủ phương trình đường thẳng, kiểm phần chênh lệch tiến về 0 ở hướng đang xét và nối kết quả với hình.
Nối dữ kiện với hình	Nối công thức, dữ kiện giới hạn và nhánh đồ thị; giải thích vì sao đồ thị có thể cắt đường tiệm cận.
Diễn giải mô hình	Chọn kết luận vừa đủ dữ kiện và diễn giải kết quả trong mô hình được cho, đúng điều kiện và đơn vị.
Đánh giá và sửa lập luận	Giữ phần đúng, sửa đúng lí do; khi cần xác nhận sau sửa, tự làm câu phù hợp còn chưa xem lời giải.

Tiên quyết

Em cần biến đổi được phân thức, xét dấu đơn giản và đọc kí hiệu giới hạn. Các nhiệm vụ **Khởi động (mở trên trang học liệu)** giúp em tự kiểm bốn thao tác nền này trước khi vào phần học. Nếu thiếu thao tác nào, dùng đúng phần **Ôn nền (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Đạo hàm không bắt buộc trong các nhiệm vụ chính.

Nhánh **Phối hợp (mở trên trang học liệu)** cần kiến thức về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên tập đang xét. Nhánh **Chuyển giao (mở trên trang học liệu)** cần đọc được giới hạn chứa căn và trị tuyệt đối. Hai nhánh là lựa chọn thêm.

Cách học

Chuẩn bị giấy để giữ bài tự làm và ghi lí do cho từng kết luận. Tự trả lời trước khi mở phần đối chiếu. Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi; riêng một lượt Kiểm tra phải thực hiện liên tục theo hướng dẫn của phần ấy. Khởi động chỉ khảo sát một số thao tác nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc chứng nhận đạt cả gói.

Nếu cần học từ đầu, làm **Khởi động (mở trên trang học liệu)**, rồi đọc **Giới hạn mô tả hành vi của hàm số (mở trên trang học liệu)**. Ở mỗi mục kiến thức, thử trả lời Gọi mở trước khi đọc phần giải thích; Gọi mở không thay nhiệm vụ cuối mỗi mục. Câu Nhiệm vụ trong Bài học có lời giải riêng.

Chọn nơi bắt đầu

- Cần học hoặc nhớ lại khái niệm: vào **Bài học (mở trên trang học liệu)**.
- Đã hiểu và muốn tự làm: vào **Luyện tập (mở trên trang học liệu)**.
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)**, kể cả chưa làm các phần trước.
- Đến ngày hẹn: chọn lượt ở **Ôn lại (mở trên trang học liệu)**.

Đó là các điểm vào theo nhu cầu. Việc bỏ qua một phần không tự cho biết em đã làm chủ phần ấy.

Bản đồ học

Bài học (mở trên trang học liệu) → Luyện tập (mở trên trang học liệu) → Kiểm tra (mở trên trang học liệu) → Ôn lại (mở trên trang học liệu)

Đây là tiến trình được khuyến nghị và thứ tự tra đọc. Em được chọn điểm vào, đi tới hoặc quay lại theo nhu cầu; không phải hoàn tất lần lượt mọi phần mới được vào phần tiếp theo. Phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại thực hiện theo ngày hẹn.

Ôn nền, Lời giải, Sửa lỗi và Nhật kí là các hỗ trợ được gọi khi cần, theo bảng dưới. Sau hỗ trợ, trở về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Khi cần hỗ trợ

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Nhớ lại một khái niệm của gói	Đúng mục trong Bài học (mở trên trang học liệu)	Trở về câu đang vướng
Bổ sung cách đọc giới hạn hoặc biến đổi	Đúng phần Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu nền rồi trở về bài gốc
Đối chiếu hoặc sửa bài đã làm	Lời giải (trang 5), rồi Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) nếu cần	Kiểm đúng phần còn sai bằng câu phù hợp chưa xem đáp án
Lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi dữ kiện đã có, không cần ghi sau mọi thao tác

Giữ bài tự làm trước khi mở trợ giúp; khi đối chiếu, xem cả lí do và kết luận. Nếu đã nhận trợ giúp, ghi riêng phần làm được sau đó. Câu đã xem đáp án dùng để học lại, không tính là lần tự làm mới.

Riêng trong một lượt Kiểm tra, em phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần mở Bài học, Ôn nền, Sửa lỗi hoặc Lời giải để trợ giúp, hãy kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước. Nếu vào thẳng một phần hỗ trợ, chọn câu hoặc hoạt động em muốn trở về.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Hoàn tất lượt chính khi bài làm tự lực cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và những lỗi cản trở việc học tiếp đã được kiểm lại bằng câu phù hợp chưa gặp trước đó. Dùng bảng sau **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)** để xem từng mục tiêu, không chỉ đếm đáp số đúng. Nếu chưa có câu mới phù hợp hoặc còn sai sau hỗ trợ, ghi rõ phần chưa xác nhận và tiếp tục phần độc lập đủ nền.

Khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn Ôn lại sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần. Em có thể học tiếp nội dung phù hợp trong khi chờ lịch ôn; kết quả làm được ngay sau học chưa cho biết em còn nhớ sau nhiều ngày.

Lời giải

Tự làm rồi mới mở lời giải của đúng câu. Đối chiếu điều kiện, cách làm và kết luận; phần tiêu chí giúp em nhận ra bước còn thiếu. Nếu đang làm Kiểm tra, hãy kết thúc lượt và gửi bài ban đầu trước khi mở trợ giúp.

Các ví dụ làm mẫu và đáp án nên ở ngay nơi giải thích; không chép lại ở đây.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 – Giữ tập xác định khi rút gọn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Mẫu phải khác 0, nên $D = \mathbb{R} \setminus \{10\}$. Với $x \neq 10$,

$$r(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x-10} = x+10.$$

Hai biểu thức bằng nhau trên D . Phép rút gọn không mở rộng tập xác định, nên không được thêm 10 hoặc gán giá trị $r(10)$.

Tiêu chí đối chiếu: giữ điều kiện bên cạnh công thức rút gọn. Nếu còn nhầm, xem [Biến đổi phân thức](#) (mở trên trang học liệu), rồi [Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu).

[Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 02 – Đọc hướng và xét dấu

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Khi $x \rightarrow 1^-$, các giá trị $x < 1$ tiến gần 1; mẫu $x-1$ âm và tiến về 0. Tử -3 âm, nên thương dương và tăng không bị chặn:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} p(x) = +\infty.$$

Khi $x \rightarrow 1^+$, các giá trị $x > 1$ tiến gần 1; mẫu dương và tiến về 0. Tử vẫn âm, nên

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} p(x) = -\infty.$$

Tiêu chí đối chiếu: đọc đúng hướng và giải thích dấu ở từng phía. Nếu vướng, dùng [Giới hạn một phía](#) (mở trên trang học liệu), rồi [Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu).

[Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 03 – Xét riêng hai đầu vô cực**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Khi xét ở xa, $x \neq 0$ và

$$q(x) = \frac{4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

Ở mỗi hướng $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$, tử tiến về 4, mẫu tiến về 1 khác 0. Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 4.$$

Phép chia cả tử và mẫu cho x phục vụ việc tính giới hạn ở vô cực; giá trị -2 vẫn không thuộc tập xác định ban đầu của q .

Tiêu chí đối chiếu: có biến đổi hợp lệ và kiểm riêng hai hướng. Nếu vướng, dùng **Giới hạn ở vô cực** (mở trên trang học liệu), rồi **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 04 – Kiểm thương và phần dư**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Điều kiện là $x \neq -1$. Ta có

$$(x + 1)(2x - 1) + 6 = 2x^2 + x + 5,$$

nên

$$A(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x + 1} \quad (x \neq -1).$$

Lấy mẫu nhân với thương rồi cộng phần dư; nếu được đúng tử ban đầu thì phép chia đã được kiểm tra. Việc dùng kết quả này để tìm tiệm cận còn cần bước giới hạn, sẽ được học ở phần chính.

Tiêu chí đối chiếu: đúng thương, dư, điều kiện và phép nhân kiểm lại. Nếu thiếu thao tác, dùng **Biến đổi phân thức** (mở trên trang học liệu), rồi **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ trong Bài học

Nhiệm vụ 05 – Rút gọn có thêm được một điểm không?

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định tự nhiên là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Với $x \in D$, ta có

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Vì vậy $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$. Phép rút gọn chỉ đúng trên D ; nó không thêm 1 vào tập xác định nên $r(1)$ vẫn không xác định. Nhận xét của bạn đúng ở phép biến đổi khi $x \neq 1$, sai ở việc gán giá trị tại điểm bị loại.

Tiêu chí đối chiếu: ghi điều kiện rút gọn; phân biệt giới hạn với giá trị của hàm.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 06 – Ghi cả đường và hướng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Theo định nghĩa, giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ cho tiệm cận ngang $y = -1$, còn giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$ cho tiệm cận ngang $y = 3$.

Chỉ ghi $y = -1$ là bỏ sót đầu trái. Hai kết quả khác nhau nên có hai đường tiệm cận ngang; phương trình của chúng có dạng $y = L$, không phải $x = L$.

Tiêu chí đối chiếu: viết đủ hai đường và gắn đúng hướng tiến ra vô cực.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 07 – Chỉ một phía có nghĩa

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Có thể kết luận $x = 5$ là tiệm cận đứng vì

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} w(x) = -\infty.$$

Chỉ một giới hạn một phía vô cực đã đủ. Tập xác định $(-\infty; 5)$ không có điểm nào lớn hơn 5 nên không yêu cầu thêm giới hạn phải. Kết quả không có nghĩa $w(5) = -\infty$: hàm không được xác định tại 5.

Tiêu chí đối chiếu: viện dẫn đúng điều kiện một phía và giữ đúng tập xác định.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 08 – Thiếu một hằng số**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Với $x \neq -6$, ta có

$$q(x) - (2x - 5) = \frac{1}{x + 6}.$$

Ở cả hai hướng $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$, phần phân thức tiến về 0. Vì thế đường tiệm cận xiên là $y = 2x - 5$.

Trong khi đó,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [q(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [q(x) - 2x] = -5 \neq 0.$$

Do đó $y = 2x$ không phải tiệm cận xiên. Chỉ hệ số góc chưa xác định đủ đường thẳng.

Tiêu chí đối chiếu: tìm đủ hệ số tự do và bậc đường sai bằng giới hạn của hiệu.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 09 – Không mở rộng tập xác định theo ý mình**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Khi $t \geq 0$, mẫu $t + 2$ dương. Ta có

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 10.$$

Đường ngang $z = 10$ biểu diễn mức mà chỉ số tiến gần khi thời gian tăng trong mô hình. Với mọi $t \geq 0$ hữu hạn, $\frac{8}{t+2} > 0$, nên $z(t) > 10$; chỉ số không bằng 10 tại thời điểm hữu hạn.

Tập thời gian được xét không có điểm nào tiến sát -2 , nên không lấy $t = -2$ làm tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số trong mô hình.

Tiêu chí đối chiếu: nêu giới hạn, kiểm sự đạt được bằng dấu phần dư và giữ đúng tập đang xét.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 10 – Có giá trị tại mốc vẫn cần xét lân cận**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Điểm $(2; 5)$ thuộc đồ thị là phần đúng vì $g(2) = 5$. Tuy nhiên, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$ đã đủ để $x = 2$ là tiệm cận đứng. Giá trị tại đúng mốc không thay đổi hành vi ở các điểm lân cận phía phải.

Câu sửa: “Đồ thị có điểm $(2; 5)$ và có tiệm cận đứng $x = 2$, vì giới hạn phải tại 2 bằng $+\infty$.” Dữ kiện chưa quyết định giới hạn trái; không được gán nó bằng 5 hoặc $+\infty$.

Đạt khi giữ đúng điểm trên đồ thị, viện dẫn đúng giới hạn phải và không suy thêm về phía trái. Nếu còn dùng giá trị tại mốc để bác tiệm cận, đọc lại đoạn “Nếu hàm được gán riêng giá trị tại mốc?” ở **mục tiệm cận đứng** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Luyện tập

Nhiệm vụ 11 – Từ giới hạn đến đường thẳng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Hai giới hạn ở vô cực cùng bằng 2 nên xác định một tiệm cận ngang $y = 2$, ở cả đầu trái và đầu phải. Không đếm một đường hai lần.

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ đã đủ chứng minh $x = 1$ là tiệm cận đứng; giới hạn phải $+\infty$ cho thêm hành vi của nhánh bên kia. Hàm liên tục tại mọi điểm khác 1, nên không có tiệm cận đứng nào khác.

Tiêu chí đối chiếu: ghi đúng dạng phương trình, viện dẫn đúng giới hạn và không đếm đôi đường ngang.

Nếu còn sai: nhầm phía hoặc điều kiện đường đứng thì xem **Giới hạn một phía** (mở trên trang học liệu) và làm **Nhiệm vụ 36 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu); nhầm phương trình đường ngang hoặc hai đầu thì xem **Tiệm cận ngang** (mở trên trang học liệu) và làm ý a của **Nhiệm vụ 37 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chọn đúng ý chưa gặp trước đó, không làm lại câu đã gặp trước đó để xác nhận. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 12 – Tìm tập xác định trước khi tính

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Trên tập xác định này,

$$f(x) = 5 + \frac{17}{x-3}.$$

Vì phân phân thức tiến về 0 ở cả hai đầu vô cực,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5.$$

Tiệm cận ngang là $y = 5$. Khi $x \rightarrow 3^-$, mẫu âm và tiến về 0; khi $x \rightarrow 3^+$, mẫu dương và tiến về 0. Tử của phân phân thức là $17 > 0$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = 3$. Ngoài điểm này hàm liên tục, nên không còn tiệm cận đứng khác.

Tiêu chí đối chiếu: tập xác định đúng; giới hạn ở vô cực và giới hạn một phía đúng; kết luận dựa vào giới hạn.

Nếu còn sai: sai biến đổi thì xem **Biến đổi phân thức** (mở trên trang học liệu) và tự kiểm tra tác trước; sai giới hạn ở vô cực thì xem **Giới hạn ở vô cực** (mở trên trang học liệu), chọn đúng ý chưa gặp trước đó ở **bảng chọn câu sửa** (mở trên trang học liệu); sai dấu hoặc phía tại mốc thì xem **Giới hạn một phía** (mở trên trang học liệu) và làm **Nhiệm vụ 36 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Câu chỉ tính giới hạn tại mốc không xác nhận phần ở vô cực. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 13 – Một điểm hở

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Với $x \neq 3$,

$$u(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 3^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} u(x) = 6$. Cả hai giới hạn đều hữu hạn, nên $x = 3$ không là tiệm cận đứng. Nhận định đã cho sai.

Giới hạn bằng 6 không làm $u(3)$ được xác định. Đồ thị có điểm hở ở $(3; 6)$.

Tiêu chí đối chiếu: giữ điểm loại sau rút gọn và không đồng nhất giới hạn với giá trị tại điểm.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/tao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 35 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 14 – Chỉ có một phía để tiến gần

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định đã cho là $D = (4; +\infty)$. Khi $x \rightarrow 4^+$, ta có $\sqrt{x-4} \rightarrow 0^+$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty.$$

Vậy $x = 4$ là tiệm cận đứng. Không xét phía trái vì không có điểm thuộc D ở phía ấy.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, nên $y = 0$ là tiệm cận ngang. Không xét giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$ vì tập xác định chỉ gồm các giá trị lớn hơn 4.

Tiêu chí đối chiếu: xét đúng các hướng tập xác định cho phép và hiểu một phía vô cực đã đủ.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 36 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 15 – Không bỏ sót đầu trái

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Giới hạn ở đầu phải cho đường $y = 7$; giới hạn ở đầu trái cho đường $y = -2$. Đó là hai tiệm cận ngang khác nhau.

Hai dữ kiện chỉ mô tả hành vi ở vô cực, chưa cho biết hàm số tiến tới đâu gần các mốc hữu hạn. Vì vậy không thể từ đó kết luận đồ thị không có tiệm cận đứng.

Tiêu chí đối chiếu: ghi đủ hai hướng và phân biệt điều suy ra được với điều chưa đủ dữ kiện.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 37 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 16 – Thương và phần dư

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Kiểm phép chia bằng

$$(x+2)(x+1)+5=x^2+3x+7.$$

Với $x \neq -2$, suy ra $f(x) = x+1 + \frac{5}{x+2}$. Vì thế

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0.$$

Đường tiệm cận xiên là $y = x+1$. Phần dư có tử dương, nên

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = -2$. Hàm liên tục ở các điểm còn lại.

Tiêu chí đối chiếu: phép chia, phép nhân kiểm lại, giới hạn của hiệu và giới hạn tại điểm loại đều đúng.

Nếu chia sai hoặc thiếu hệ số tự do: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 38 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu).

liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, [Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#).

Nhiệm vụ 17 – Đừng bỏ mất hệ số tự do

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Trên tập xác định $x \neq 2$, chia đa thức được

$$g(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x-2}.$$

Kiểm lại bằng $(x-2)(2x+3) + 10 = 2x^2 - x + 4$. Phần dư tiến về 0 ở cả hai đầu, nên

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - (2x+3)] = 0.$$

Vậy tiệm cận xiên là $y = 2x + 3$. Mặt khác,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - 2x] = 3 \neq 0.$$

Đường $y = 2x$ bị bác bỏ. Tỉ số hệ số cao nhất chỉ giúp nhận hệ số góc trong phép chia này, chưa cho hệ số tự do.

Tiêu chí đối chiếu: tìm đủ đường thẳng và dùng đúng giới hạn hiệu để kiểm nhận định.

Nếu chia sai hoặc thiếu hệ số tự do: [xem lại kiến thức/thao tác liên quan \(mở trên trang học liệu\)](#), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của [Nhiệm vụ 38 trong Sửa lỗi \(mở trên trang học liệu\)](#). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, [Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#).

Nhiệm vụ 18 – Cắt mà vẫn tiến sát

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x , hàm có tập xác định $\mathbb{R}$. Khi $x \neq 0$, ta viết

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Tử tiến về 0, mẫu tiến về 1 khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$. Vì vậy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ và tiệm cận ngang là $y = 0$.

Phương trình $f(x) = 3$ tương đương $x-1=0$, nên giao điểm là $(1; 3)$. Không có mâu thuẫn: định nghĩa tiệm cận ngang mô tả hành vi ở vô cực, còn giao điểm có hoành độ hữu hạn.

Tiêu chí đối chiếu: chứng minh cả giới hạn và giao điểm, rồi giải thích vì sao chúng cùng đúng.

Nếu coi giao điểm là mâu thuẫn với tiệm cận: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 37 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 19 – Một hình, ba hành vi

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Ở nhánh bên trái, dữ kiện $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ cho tiệm cận ngang $y = -1$. Trên hình, đó là mức nhánh trái tiến gần khi đi xa về bên trái.

Ở phía phải của mốc 2, nhánh đi xuống không bị chặn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. Do đó $x = 2$ là tiệm cận đứng. Khi đi xa về bên phải, hiệu với $2x + 1$ tiến về 0, nên $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên ở đầu phải.

b) Giới hạn trái bằng 4 chỉ mô tả nhánh trái tại mốc 2. Điều kiện tiệm cận đứng cần ít nhất một phía vô cực; giới hạn phải đã thỏa điều kiện, nên giới hạn trái hữu hạn không bác kết luận.

c) Một ảnh chỉ thể hiện cửa sổ hữu hạn. Các giới hạn được cho bảo đảm kết luận về hành vi ở xa; không thay chúng bằng việc ước lượng một đoạn trông gần thẳng.

Tiêu chí đối chiếu: chỉ đúng ba hành vi trên hình và viện dẫn đúng dữ kiện tương ứng.

Nếu không nổi được dữ kiện với đúng nhánh: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 39 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 20 – Nhiệt độ trong mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Khi $t \geq 0$, ta có

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 6.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang $h = 6$: trong mô hình, nhiệt độ tiến gần 6°C khi thời gian tăng.

b) Với mọi $t \geq 0$ hữu hạn, $\frac{18}{t+2} > 0$, nên $h(t) > 6$. Không có thời điểm hữu hạn tại đó nhiệt độ bằng đúng mức này.

c) Mô hình chỉ xét $t \geq 0$, nên thời gian không thể tiến sát -2 . Vì vậy $t = -2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình đã cho, dù mẫu của công thức bằng 0 tại đó.

Tiêu chí đối chiếu: giữ đủ giới hạn, đơn vị, điều kiện không đạt và tập thời gian được xét.

Nếu bỏ tập đang xét hoặc nhầm mức tiến tới với mức đạt được: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 38** trong **Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Phối hợp

Nhiệm vụ 21 – Tiệm cận và giá trị không đạt

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Với $x \geq 0$, ta có $x + 1 \geq 1$, nên

$$0 < \frac{6}{x+1} \leq 6, \quad 2 < C(x) \leq 8.$$

Dấu bằng $C(x) = 8$ xảy ra tại $x = 0$, nên giá trị lớn nhất là 8 và đạt tại 0.

Để loại mọi ứng viên cho giá trị nhỏ nhất, lấy bất kì $x \geq 0$ và xét điểm $x + 1$ cũng thuộc tập xác định. Vì $x + 2 > x + 1 > 0$,

$$C(x+1) = 2 + \frac{6}{x+2} < 2 + \frac{6}{x+1} = C(x).$$

Mỗi giá trị đều có một giá trị nhỏ hơn, nên hàm không có giá trị nhỏ nhất. Đồng thời $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 2$ cho tiệm cận ngang $y = 2$; mức tiến tới ấy không được đạt.

Tiêu chí đối chiếu: nêu điểm đạt giá trị lớn nhất; chứng minh không có giá trị nhỏ nhất, không chỉ nói mức 2 không đạt.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Chuyển giao

Nhiệm vụ 22 – Hai đường xiên khác nhau

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Khi $x \rightarrow +\infty$, nhân liên hợp được

$$\sqrt{x^2 + 9} - x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} + x} \rightarrow 0.$$

Mẫu dương và tăng không bị chặn ở hướng này, nên $y = x$ là tiệm cận xiên ở đầu phải.

Khi $x \rightarrow -\infty$, xét đường khác:

$$\sqrt{x^2 + 9} + x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} - x} \rightarrow 0.$$

Ở hướng này, $-x \rightarrow +\infty$ và mẫu cũng tăng không bị chặn, nên $y = -x$ là tiệm cận xiên ở đầu trái. Không lấy một đường làm kết luận cho cả hai đầu.

Tiêu chí đối chiếu: chọn đúng hiệu ở mỗi hướng; giải thích mẫu tiến ra vô cực; không dùng $\sqrt{x^2} = x$ khi $x < 0$.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Kiểm tra

Nhiệm vụ 23 – Hai hàm ở cùng một mốc

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Đúng tập xác định của cả hai hàm; mỗi tập xác định 0,5	1
b	Đúng giới hạn và căn cứ của từng hàm; mỗi hàm 1	2
c	Phân loại đúng hai đường đứng có lí do: 0,5; giữ $p(4)$ không xác định: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

a) Hai tập xác định tự nhiên đều là $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) Với $x \neq 4$, ta có $p(x) = x + 4$. Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} p(x) = 8.$$

Với q , mẫu $(x - 4)^2$ dương và tiến về 0 từ cả hai phía, còn tử bằng 3 > 0. Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} q(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} q(x) = +\infty.$$

c) Đường $x = 4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị p , nhưng là tiệm cận đứng của đồ thị q . Phép rút gọn không làm $p(4)$ được xác định, nên không được gán $p(4) = 8$.

Tiêu chí đối chiếu: xem riêng tập xác định, hai giới hạn của mỗi hàm, kết luận tiệm cận và giá trị tại điểm.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 40** trong **Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 24 – Đọc hai đầu và một mốc hữu hạn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Hai đường ngang kèm hướng: 1; đường đứng kèm phía: 0,5	1,5
b	Chỉ đúng hành vi ở hai đầu xa: 0,5; phía trái tại mốc: 0,5; phía phải tại mốc: 0,5	1,5
c	Nêu một phía vô cực là đủ: 0,5; giải thích giới hạn trái hữu hạn không bác điều kiện phải: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

a) Giới hạn ở đầu trái bằng 1 cho tiệm cận ngang $y = 1$ khi $x \rightarrow -\infty$. Giới hạn ở đầu phải bằng -4 cho tiệm cận ngang $y = -4$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, đường $x = -1$ là tiệm cận đứng. Hàm liên tục tại các điểm còn lại của tập xác định nên không có tiệm cận đứng khác.

b) Nhánh trái tiến gần mức 1 khi đi xa về bên trái, rồi kết thúc bằng điểm hở $(-1; 3)$. Nhánh phải đi lên không bị chặn khi tiến gần mốc -1 từ phải, rồi tiến gần mức -4 khi đi xa về bên phải. Cần chỉ từng phần trên hình, không chỉ đọc lại ba phương trình.

c) Giới hạn trái hữu hạn không xóa điều kiện vô cực đã đúng ở phía phải. Một phía vô cực đủ để kết luận tiệm cận đứng.

Tiêu chí đối chiếu: đủ hai đầu, đúng dạng phương trình và đúng nhánh; giải thích được vai trò của từng giới hạn một phía.

Nếu không nổi được đủ kiện với đúng nhánh: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 43 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 25 – Đường xiên cần đủ hai hệ số

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Tập xác định: 0,5; thương và dư đúng: 0,5	1
b	Đường xiên đúng: 0,5; kiểm tra giới hạn của hiệu ở hai đầu: 1	1,5
c	Tính giới hạn hiệu với đường đề nghị: 0,5; so với điều kiện định nghĩa: 0,5	1
d	Hai giới hạn một phía và lí do về dấu: 1; phương trình đường đứng: 0,5	1,5

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Với $x \neq -1$,

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{7}{x+1},$$

vì $(x+1)(2x+1) + 7 = 2x^2 + 3x + 8$. Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0.$$

Tiệm cận xiên là $y = 2x + 1$. Trong khi đó, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] = 1 \neq 0$, nên đường $y = 2x$ được đề nghị không đúng.

Tại điểm loại, phần dư có tử dương và mẫu đổi dấu qua -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = -1$.

Tiêu chí đối chiếu: giữ tập xác định; chia và kiểm tra giới hạn của hiệu đúng; xét đường đúng bằng giới hạn riêng tại điểm loại.

Nếu chia sai hoặc thiếu hệ số tự do: xem [Biến đổi phân thức \(mở trên trang học liệu\)](#), rồi dùng ý a của [Nhiệm vụ 42 trong Sửa lỗi sau Kiểm tra \(mở trên trang học liệu\)](#). Nếu sai dấu hoặc điều kiện đường đúng ở ý d, xem [Giới hạn một phía \(mở trên trang học liệu\)](#), rồi chọn ý b của [Nhiệm vụ 40 trong Sửa lỗi sau Kiểm tra \(mở trên trang học liệu\)](#). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, [Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#).

Nhiệm vụ 26 – Một phản ví dụ cần hai điều

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Biến đổi và giới hạn ở hai đầu: 0,5; đường ngang: 0,5	1
b	Giao điểm: 0,5; kiểm tập xác định: 0,5	1
c	Bác nhận định: 0,5; giải thích bằng định nghĩa và giao điểm hữu hạn: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

Mẫu $x^2 + 4$ dương với mọi x . Khi $x \neq 0$,

$$\frac{x+3}{x^2+4} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -2$, nên $y = -2$ là tiệm cận ngang.

Mặt khác, $g(x) = -2$ tương đương $x + 3 = 0$. Giao điểm là $(-3; -2)$, thuộc đồ thị vì mẫu tại đó khác 0.

Hàm này vừa có tiệm cận ngang vừa cắt đường ấy, nên nhận định đã cho sai. Giao điểm hữu hạn không trái điều kiện giới hạn ở vô cực.

Tiêu chí đối chiếu: có phép tính giới hạn, có giao điểm hợp lệ và có lời giải thích nối hai kết quả.

Nếu coi giao điểm là mâu thuẫn với tiệm cận: xem lại kiến thức/tao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 41 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 27 – Giới hạn của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Giới hạn và đường ngang: 1; ý nghĩa cùng đơn vị: 0,5	1,5
b	Kết luận sự đạt được: 0,5; căn cứ dấu phần dư trên tập đang xét: 1	1,5
c	Bác đường đúng đề nghị: 0,5; chỉ rõ không có thời điểm hợp lệ tiến sát mốc: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

Khi $t \rightarrow +\infty$ với điều kiện $t \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 9.$$

Tiệm cận ngang là $A = 9$. Trong mô hình, nồng độ tiến gần 9 mg L^{-1} khi thời gian tăng.

Với mọi thời điểm hữu hạn hợp lệ, $t + 4 > 0$ nên $\frac{20}{t+4} > 0$ và $A(t) > 9$. Do đó nồng độ không bằng đúng mức ấy tại một thời điểm hữu hạn.

Mô hình chỉ xét $t \geq 0$, nên thời gian không thể tiến sát -4 . Vì vậy $t = -4$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình. Khi dùng công thức, phải giữ điều kiện thời gian đã cho.

Tiêu chí đối chiếu: giới hạn và đơn vị đúng; kiểm sự đạt được bằng dấu phần dư; không mở rộng tập đang xét.

Nếu bỏ tập đang xét hoặc nhầm mức tiến tới với mức đạt được: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (mở trên trang học liệu), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của **Nhiệm vụ 42 trong Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, **Xem đề bài** (mở trên trang học liệu) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Ôn lại

Nhiệm vụ 28 – Nhớ lại tập xác định và giới hạn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Hai hàm có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Với $x \neq 5$, $u(x) = x + 5$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} u(x) = 10.$$

Đường $x = 5$ không là tiệm cận đứng của đồ thị u và $u(5)$ vẫn không xác định. Với v , tử dương còn mẫu tiến về 0 theo dấu từng phía, nên

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} v(x) = +\infty.$$

Vậy $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị v ; $v(5)$ cũng không xác định.

b) Chia tử và mẫu của w cho x khi xét ở xa:

$$w(x) = \frac{7 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}}.$$

Ở cả hai đầu, tử tiến về 7, mẫu tiến về 2 khác 0. Tiệm cận ngang là $y = \frac{7}{2}$ khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$.

Tiêu chí đối chiếu: phân biệt hai hành vi tại điểm loại và tính đúng giới hạn ở cả hai đầu.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 29 – Phần dư và giao điểm

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định của f là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vì $(x-2)(x-1) + 6 = x^2 - 3x + 8$,

$$f(x) = x - 1 + \frac{6}{x-2} \quad (x \neq 2).$$

Hiệu với $x-1$ tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$, nên tiệm cận xiên là $y = x - 1$. Tại 2, giới hạn trái là $-\infty$, giới hạn phải là $+\infty$; tiệm cận đứng là $x = 2$.

b) Mẫu $x^2 + 9 > 0$ với mọi x . Phần phân thức có thể viết thành

$$\frac{x-2}{x^2+9} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{9}{x^2}} \quad (x \neq 0).$$

Biểu thức tiến về 0 ở cả hai đầu nên tiệm cận ngang của g là $y = 1$. Giải $g(x) = 1$ được $x = 2$; giao điểm $(2; 1)$ hợp lệ. Việc cắt tại điểm hữu hạn không trái định nghĩa.

Tiêu chí đối chiếu: chia đúng và kiểm phần dư; chứng minh cả giới hạn và giao điểm ở ý thứ hai.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 30 – Chọn điều cần kiểm

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định của u loại 6. Với $x \neq 6$, $u(x) = x + 6$, nên $\lim_{x \rightarrow 6} u(x) = 12$. Vì giới hạn hữu hạn, $x = 6$ không là tiệm cận đứng; $u(6)$ vẫn không xác định.

b) Tiệm cận ngang $y = 3$ ứng với đầu phải; $y = -5$ ứng với đầu trái. Khi phác, đặt đường thứ nhất phía trên trục hoành, đường thứ hai phía dưới và ghi rõ hướng tương ứng. Hai dữ kiện không xác định toàn bộ dáng điệu đồ thị ở giữa.

c) Trên tập xác định $x \neq -1$,

$$v(x) = 3x - 2 + \frac{7}{x+1},$$

vì $(x+1)(3x-2)+7 = 3x^2+x+5$. Phần dư tiến về 0 ở cả hai đầu, nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [v(x) - (3x-2)] = 0$. Tiệm cận xiên là $y = 3x - 2$.

d) Khi $t \rightarrow +\infty$ với $t \geq 0$, ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 4$. Mức nồng độ tiến tới là 4 mg L^{-1} . Với mọi thời điểm hữu hạn thỏa điều kiện, $\frac{15}{t+3} > 0$, nên $B(t) > 4$; nồng độ không đạt mức ấy. Thời gian $t \geq 0$ không thể tiến sát -3 , nên $t = -3$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình.

Tiêu chí đối chiếu: xem riêng từng ý; ghi phần chưa giải thích được thay vì nhận cả lượt chỉ từ vài đáp số đúng.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Sửa lỗi

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Với $x \neq 7$,

$$u(x) = \frac{(x-7)(x+7)}{x-7} = x+7.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 7^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} u(x) = 14$. Hai giới hạn hữu hạn nên $x = 7$ không là tiệm cận đứng. Phép rút gọn không thêm 7 vào tập xác định, vì thế $u(7)$ không xác định.

b) Điểm $(-1; 4)$ thuộc đồ thị là phần đúng vì $v(-1) = 4$. Tuy nhiên, $\lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) = -\infty$ đã đủ để $x = -1$ là tiệm cận đứng; giá trị tại đúng mốc không xóa hành vi ở lân cận phía trái.

Câu sửa: “Đồ thị có điểm $(-1; 4)$ và có tiệm cận đứng $x = -1$, vì giới hạn trái tại -1 bằng $-\infty$.”
Dữ kiện chưa quyết định giới hạn phải; không được tự gán nó bằng 4 hoặc $-\infty$.

Tiêu chí đối chiếu: ở ý a, giữ điều kiện rút gọn và giải thích vì sao giới hạn bằng 14 không tạo giá trị tại điểm. Ở ý b, giữ dữ kiện giá trị tại mốc, viện dẫn đúng giới hạn trái và phân biệt điều đã biết với điều chưa biết về phía phải. Làm đúng ý a không tự xác nhận ý b. Sau đối chiếu, trở về đúng câu hoặc Điểm dừng đã gọi; nếu từ Nhiệm vụ 10 thì **trở về câu ấy (mở trên trang học liệu)**. Câu đã xem lời giải dùng để học, không tính là xác nhận độc lập mới.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 36 – Dấu ở hai phía

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Hàm có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{6\}$. Khi $x \rightarrow 6^-$, tử -4 âm và mẫu $x - 6$ âm, tiến về 0. Thương dương và tăng không bị chặn:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} v(x) = +\infty.$$

Khi $x \rightarrow 6^+$, mẫu dương và tiến về 0, còn tử âm, nên

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} v(x) = -\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = 6$. Một trong hai giới hạn vô cực đã đủ kết luận, còn việc tính cả hai giúp mô tả đúng từng nhánh.

Tiêu chí đối chiếu: giải thích được dấu từ tử và mẫu; không đoán theo một mẫu nhớ sẵn.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Giới hạn ở đầu phải cho tiệm cận ngang $y = -6$ khi $x \rightarrow +\infty$; giới hạn ở đầu trái cho $y = 4$ khi $x \rightarrow -\infty$.

b) Hàm g xác định trên $\mathbb{R}$ vì $x^2 + 2 > 0$. Khi $x \neq 0$,

$$\frac{x+1}{x^2+2} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Vậy tiệm cận ngang là $y = 2$. Phương trình $g(x) = 2$ tương đương $x + 1 = 0$ và cho giao điểm $(-1; 2)$.

Tiêu chí đối chiếu: ý đầu kiểm hai hướng; ý sau cần cả giới hạn lẫn giao điểm. Làm đúng một ý không thay phần còn thiếu.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Trên tập xác định này,

$$f(x) = x + 3 + \frac{6}{x+1},$$

vì $(x+1)(x+3) + 6 = x^2 + 4x + 9$. Hiệu với $x+3$ tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$. Tiệm cận xiên là $y = x + 3$.

b) Khi $t \geq 0$, ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 8$. Mức tiến tới là 8°C . Phần $\frac{10}{t+5} > 0$ ở mọi thời điểm hữu hạn hợp lệ, nên $a(t) > 8$ và không đạt mức ấy.

Vì chỉ xét $t \geq 0$, thời gian không thể tiến sát -5 . Do đó $t = -5$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình.

Tiêu chí đối chiếu: kiểm đủ hệ số tự do và phần dư ở ý đầu; giữ giới hạn, sự đạt được và tập đang xét ở ý sau.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ở đầu trái, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ cho tiệm cận ngang $y = 3$. Đường $x = -2$ là tiệm cận đứng do giới hạn trái tại mốc bằng $-\infty$. Ở đầu phải, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0$ cho tiệm cận xiên $y = -x - 2$.

Nhánh trái tiến gần mức 3 khi đi xa về trái và đi xuống không bị chặn khi tới -2 từ trái. Nhánh phải tiến tới điểm hở $(-2; 1)$ khi tới mốc từ phải; khi đi xa về phải, nó tiến gần đường xiên $y = -x - 2$ đi xuống. Hiệu tiến về 0 ở đầu phải mới là căn cứ nhận đường xiên; không chỉ dựa vào nét cong trông gần thẳng.

Điểm hở không phải giá trị của hàm tại -2 ; nó biểu thị giới hạn phải hữu hạn trong hình này. Giới hạn phải không thay thế giới hạn trái. Vì thế dùng điểm hở để bác đường đứng là sai.

Đạt khi chỉ đúng từng nhánh, hướng và đường tương ứng, kể cả đường xiên ở đầu phải, đồng thời giải thích được căn cứ; không chỉ chép ba phương trình. Nếu còn nhầm phía, xem [Giới hạn một phía \(mở trên trang học liệu\)](#); nếu đòi hai phía cùng vô cực, xem [mục tiệm cận đứng \(mở trên trang học liệu\)](#). Nếu nhầm nhánh xiên, xem [Tiệm cận xiên \(mở trên trang học liệu\)](#). Trở về [Điểm dừng 03 \(mở trên trang học liệu\)](#) nếu bài được gọi từ đó, hoặc nhiệm vụ đã gọi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định của p loại 8. Với $x \neq 8$, $p(x) = x + 8$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} p(x) = 16.$$

Do đó $x = 8$ không là tiệm cận đứng, còn $p(8)$ không xác định. Giới hạn hữu hạn không bổ sung giá trị tại điểm.

b) Với q , giá trị -2 không thuộc tập xác định. Khi x tiến tới -2 từ bên trái hoặc bên phải, mẫu $(x + 2)^2$ dương và tiến về 0, còn tử bằng $-3 < 0$, nên

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} q(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} q(x) = -\infty.$$

Vậy $x = -2$ là tiệm cận đứng. Mẫu bình phương khiến dấu hai phía giống nhau trong bài này.

Tiêu chí đối chiếu: phân biệt giới hạn hữu hạn/vô cực và giải thích dấu khi mẫu là bình phương.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Đầu phải cho tiệm cận ngang $y = 6$ khi $x \rightarrow +\infty$; đầu trái cho $y = -7$ khi $x \rightarrow -\infty$.

b) Vì $x^2 + 5 > 0$, hàm g có tập xác định $\mathbb{R}$. Chia tử và mẫu của phân thức cho x^2 khi xét ở xa:

$$\frac{x-4}{x^2+5} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Vậy $y = -3$ là tiệm cận ngang. Giải $g(x) = -3$ được $x = 4$, nên đồ thị cắt đường ấy tại $(4; -3)$. Giao điểm hữu hạn không bác giới hạn ở vô cực.

Tiêu chí đối chiếu: đúng đường và hướng ở ý đầu; có cả phép kiểm giới hạn lẫn giao điểm ở ý sau.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Với $x \neq 1$, ta có

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{5}{x-1},$$

vì $(x-1)(2x-1) + 5 = 2x^2 - 3x + 6$. Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0.$$

Tiệm cận xiên là $y = 2x - 1$.

b) Mô hình chỉ áp dụng trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 30$. Các thời điểm này không thể tăng không bị chặn, nên không có cơ sở xét giới hạn khi $t \rightarrow +\infty$ cho mô hình đã cho. Nhận định của bạn đã dùng công thức ngoài phạm vi áp dụng để kết luận về tiệm cận ngang.

Nếu bổ sung giả thiết mở rộng cùng công thức cho mọi $t \geq 0$, ta đang xét một mô hình mở rộng. Khi đó

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[7 + \frac{14}{t+6} \right] = 7,$$

nên mô hình mở rộng có đường ngang $b = 7$ và $b(t) > 7$ ở mọi thời điểm hữu hạn hợp lệ; mức 7 mg L^{-1} không được đạt. Kết luận có điều kiện này không tự đúng cho tập được cho ban đầu.

Tiêu chí đối chiếu: ý đầu kiểm đủ đường xiên; ý sau phân biệt mô hình đã cho với mô hình được mở rộng thêm.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Nhánh trái tiến gần mức 2 khi $x \rightarrow -\infty$, nên có tiệm cận ngang $y = 2$ ở đầu trái. Nhánh phải đi lên không bị chặn khi $x \rightarrow 3^+$, nên $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Ở đầu phải, dữ kiện $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = 0$ cho tiệm cận xiên $y = -x + 4$. Trên hình cần chỉ đúng nhánh đi xuống ở xa về bên phải và hướng tiến gần đường xiên ấy.

b) Điểm hở $(3; -1)$ cho biết giới hạn trái tại 3 bằng -1 , đồng thời điểm này không thuộc đồ thị. Nó không mô tả giới hạn phải. Vì giới hạn phải bằng $+\infty$, điều kiện tiệm cận đứng vẫn được thỏa mãn.

c) Nhận định “có điểm hở nên không có tiệm cận đứng ở cùng hoành độ” sai. Phải xét hành vi ở từng phía, không lấy một dấu hiệu ở nhánh trái thay cho việc kiểm cả mốc.

Tiêu chí đối chiếu: chỉ đúng nhánh/hướng của ba đường, giải thích điểm hở và điều kiện một phía. Câu chỉ tính từ công thức không thay phần chỉ trên hình.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Sau Ôn lại**Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu****Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Tập xác định của u là $\mathbb{R} \setminus \{9\}$. Với $x \neq 9$, $u(x) = x + 9$, nên $\lim_{x \rightarrow 9} u(x) = 18$. Vì giới hạn hữu hạn, $x = 9$ không là tiệm cận đứng, còn $u(9)$ vẫn không xác định.

b) Với $v(x) = \frac{5}{x+4}$, tử dương và mẫu đổi dấu qua -4 . Do đó

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} v(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = -4$.

c) Tiệm cận ngang ở đầu phải là $y = 8$ khi $x \rightarrow +\infty$; ở đầu trái là $y = -9$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Tiêu chí đối chiếu: xem riêng tập xác định và giới hạn hữu hạn, dấu hai phía, hai đầu vô cực; không dùng một ý đúng để nhận cả ba.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Trên tập xác định $x \neq 1$,

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{8}{x-1},$$

vì $(x-1)(3x+1)+8 = 3x^2-2x+7$. Hiệu với $3x+1$ tiến về 0 ở cả hai đầu, nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (3x+1)] = 0$ và tiệm cận xiên là $y = 3x + 1$.

b) Mẫu $x^2 + 7 > 0$ với mọi x . Phần phân thức của g tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$, vì sau khi chia tử/mẫu cho x^2 ta được tử tiến về 0, mẫu tiến về 1. Tiệm cận ngang là $y = 4$.

Giải $g(x) = 4$ được $x = -2$, nên giao điểm là $(-2; 4)$. Việc cắt tại điểm hữu hạn phù hợp với định nghĩa.

c) Với $t \geq 0$, $t + 7 > 0$ nên

$$c(t) = 3 - \frac{16}{t+7} < 3, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 3.$$

Nồng độ tiến gần 3 mg L^{-1} từ phía dưới và không đạt mức ấy tại thời điểm hữu hạn. Giới hạn bằng 3 không cho phép kết luận $c(t) > 3$: phải xét dấu phần chênh lệch. Mốc -7 không thể tiếp cận trong điều kiện của mô hình nên không là tiệm cận đứng của đồ thị này.

Tiêu chí đối chiếu: kiểm phần dư, giao điểm và dấu tiến gần; giữ đúng điều kiện của biến, đơn vị trong mô hình.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Ở đầu trái, $y = x - 2$ là tiệm cận xiên vì giới hạn hiệu đã cho bằng 0. Ở đầu phải, $y = 4$ là tiệm cận ngang. Đường đứng $x = 1$ được xác định bởi giới hạn trái $-\infty$.

Nhánh trái tiến gần đường xiên khi đi xa về trái và đi xuống không bị chặn khi tới 1 từ trái. Nhánh phải tiến tới điểm hở $(1; 1)$ khi tới mốc từ phải và tiến gần mức 4 khi đi xa về phải. Điểm kín $(1; 2)$ cho $g(1) = 2$; nó không thay đổi hai giới hạn một phía. Hàm vẫn có tiệm cận đứng dù có giá trị tại mốc.

Các giới hạn ràng buộc hành vi gần mốc và ở xa, không xác định mọi giá trị bên trong các khoảng hoặc một công thức duy nhất. Đạt khi tách đúng điểm kín, điểm hở, hai phía và hai đầu. Nếu còn dùng giá trị tại mốc để bác đường đứng, xem lại **mục tiệm cận đứng (mở trên trang học liệu)**, rồi quay về đúng Điểm dừng Ôn lại đã gọi; câu đã xem không trở thành xác nhận mới.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu).

Nguồn

- Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, trang 106: yêu cầu về hình ảnh tiệm cận ngang, đứng, xiên và quan hệ với khảo sát đồ thị.
- Toán 12, tập một, Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 3, trang 20–25: đối chiếu định nghĩa và phương pháp cơ bản. Bản PDF tham khảo tương ứng trang 22–27.
- Các gói **Đơn điệu và cực trị** và **Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của ZO Math: mạch tập xác định, biểu diễn và sự đạt được. Nhật kí và tài nguyên nền chung được dẫn tại nơi sử dụng.

Các nhiệm vụ, dữ kiện số và mô hình giả định trong học liệu được biên soạn cho gói này. Hình được dựng từ công thức của từng hình; hình trong câu đọc đồ thị đi cùng dữ kiện giới hạn để có căn cứ kết luận chính xác. Gói không khẳng định tần suất xuất hiện của tiệm cận trong đề thi 2027.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học