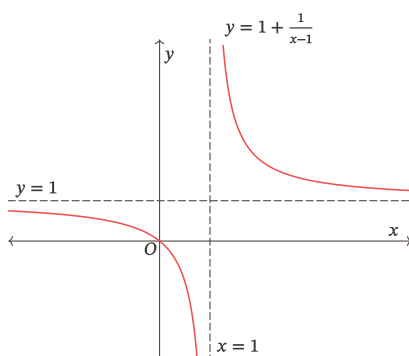


Đường tiệm cận

Bản đầy đủ, có lời giải

Có toàn bộ bài học, bài tập, lời giải và hướng dẫn chấm.



Mở trang Đường tiệm cận

R1-G03

Mục lục

Bắt đầu	2
Tiên quyết	2
Cách học	2
Chọn nơi bắt đầu	3
Bản đồ học	3
Khi cần hỗ trợ	3
Khi nào hoàn tất lượt chính?	3
Bài học	4
Khởi động	4
1. Giới hạn mô tả hành vi của hàm số	5
2. Tiệm cận ngang: xét riêng hai đầu vô cực	7
3. Tiệm cận đứng: một phía vô cực đã đủ	10
4. Tiệm cận xiên: kiểm phần chênh lệch	12
5. Giải thích kết quả theo điều kiện của mô hình	15
6. Sửa một lập luận và tự kiểm lại	16
Khép lại bài học	17
Luyện tập	19
Chặng 1 — Tập xác định, hướng và các đường ngang/đứng	19
Điểm dừng 02	20
Chặng 2 — Phần dư, hình đồ thị và mô hình	20
Điểm dừng 03	22
Phối hợp — lựa chọn thêm	22
Chuyển giao — lựa chọn thêm	23
Kiểm tra	24
Điểm dừng 04 — Sau khi kết thúc lượt Kiểm tra	26
Ôn lại	28
Lượt 1	28
Lượt 2	29
Lượt 3	29
Ôn nền	31
Sửa lỗi	34
Chọn bài theo dấu hiệu	34
Đọc lỗi để biết cần xem lại gì	37
Sau Luyện tập	37
Sau Kiểm tra	40
Sau Ôn lại	42
Sau câu xác nhận và khi hết bài mới	44
Nhật kí	45
Lời giải	47
Bài học	47
Luyện tập	51
Phối hợp	56
Chuyển giao	56
Kiểm tra	57
Ôn lại	61
Sửa lỗi	63
Nguồn	69

Bắt đầu

Học liệu “Đường tiệm cận” giúp em dùng giới hạn để xác định tiệm cận đứng, ngang và xiên của đồ thị hàm số. Em sẽ tập xét đúng tập xác định, phân biệt các phía tiến tới và dùng giới hạn để giải thích hình vẽ. Với bài toán thực tế, kết luận phải phù hợp với điều kiện và đơn vị mà mô hình đã cho. Bài Kiểm tra đánh giá mục tiêu của học liệu, không mô phỏng cấu trúc đề thi tốt nghiệp.

Một điểm bị loại khỏi tập xác định có luôn tạo ra tiệm cận đứng không? Đồ thị đã cắt một đường thẳng còn có thể tiến sát đường ấy ở rất xa không? Hai đầu của cùng một đồ thị có thể tiến sát hai đường khác nhau không?

Học xong, em cần làm được gì?

Sau khi học và tự làm, em cần có thể:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Giữ tập xác định và phân biệt giới hạn với giá trị	Giữ đúng tập xác định; phân biệt giá trị tại một điểm với hành vi của hàm số khi biến tiến gần điểm ấy.
Tìm tiệm cận ngang	Xét riêng hai đầu vô cực, nêu phương trình và hướng tương ứng; không đếm trùng đường.
Tìm tiệm cận đứng	Dùng ít nhất một giới hạn một phía vô cực hợp lệ; giữ đúng dấu và phía.
Tìm tiệm cận xiên	Tìm đủ phương trình đường thẳng, kiểm phần chênh lệch tiến về 0 ở hướng đang xét và nối kết quả với hình.
Nối dữ kiện với hình	Nối công thức, dữ kiện giới hạn và nhánh đồ thị; giải thích vì sao đồ thị có thể cắt đường tiệm cận.
Diễn giải mô hình	Chọn kết luận vừa đủ dữ kiện và diễn giải kết quả trong mô hình được cho, đúng điều kiện và đơn vị.
Đánh giá và sửa lập luận	Giữ phần đúng, sửa đúng lý do; khi cần xác nhận sau sửa, tự làm câu phù hợp còn chưa xem lời giải.

Tiên quyết

Em cần biến đổi được phân thức, xét dấu đơn giản và đọc kí hiệu giới hạn. Các nhiệm vụ Khởi động (trang 4) giúp em tự kiểm bốn thao tác nền này trước khi vào phần học. Nếu thiếu thao tác nào, dùng đúng phần Ôn nền (trang 31) được dẫn trong bài. Đạo hàm không bắt buộc trong các nhiệm vụ chính.

Nhánh Phối hợp (trang 22) cần kiến thức về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên tập đang xét. Nhánh Chuyển giao (trang 23) cần đọc được giới hạn chứa căn và trị tuyệt đối. Hai nhánh là lựa chọn thêm.

Cách học

Chuẩn bị giấy để giữ bài tự làm và ghi lý do cho từng kết luận. Tự trả lời trước khi mở phần đối chiếu. Em có thể chia Bài học và Luyện tập thành nhiều buổi; riêng một lượt Kiểm tra phải thực hiện liên tục theo hướng dẫn của phần ấy. Khởi động chỉ khảo sát một số thao tác nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc chứng nhận đạt cả gói.

Nếu cần học từ đầu, làm Khởi động (trang 4), rồi đọc Giới hạn mô tả hành vi của hàm số (trang 5). Ở mỗi mục kiến thức, thử trả lời Gợi mở trước khi đọc phần giải thích; Gợi mở không thay nhiệm vụ cuối mỗi mục. Câu Nhiệm vụ trong Bài học có lời giải riêng.

Chọn nơi bắt đầu

- Cần học hoặc nhớ lại khái niệm: vào Bài học (trang 4).
- Đã hiểu và muốn tự làm: vào Luyện tập (trang 19).
- Đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin: có thể vào Kiểm tra (trang 24), kể cả chưa làm các phần trước.
- Đến ngày hẹn: chọn lượt ở Ôn lại (trang 28).

Đó là các điểm vào theo nhu cầu. Việc bỏ qua một phần không tự cho biết em đã làm chủ phần ấy.

Bản đồ học

Bài học (trang 4) → Luyện tập (trang 19) → Kiểm tra (trang 24) → Ôn lại (trang 28)

Đây là tiến trình được khuyến nghị và thứ tự tra đọc. Em được chọn điểm vào, đi tới hoặc quay lại theo nhu cầu; không phải hoàn tất lần lượt mọi phần mới được vào phần tiếp theo. Phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại thực hiện theo ngày hẹn.

Ôn nền, Lời giải, Sửa lỗi và Nhật kí là các hỗ trợ được gọi khi cần, theo bảng dưới. Sau hỗ trợ, trở về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Khi cần hỗ trợ

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Nhớ lại một khái niệm của gói	Đúng mục trong Bài học (trang 4)	Trở về câu đang vướng
Bổ sung cách đọc giới hạn hoặc biến đổi	Đúng phần Ôn nền (trang 31)	Tự làm câu nền rồi trở về bài gốc
Đối chiếu hoặc sửa bài đã làm	Lời giải (trang 47), rồi Sửa lỗi (trang 34) nếu cần	Kiểm đúng phần còn sai bằng câu phù hợp chưa xem đáp án
Lưu quyết định hoặc nơi tiếp tục	Nhật kí (trang 45)	Ghi dữ kiện đã có, không cần ghi sau mọi thao tác

Giữ bài tự làm trước khi mở trợ giúp; khi đối chiếu, xem cả lí do và kết luận. Nếu đã nhận trợ giúp, ghi riêng phần làm được sau đó. Câu đã xem đáp án dùng để học lại, không tính là lần tự làm mới.

Riêng trong một lượt Kiểm tra, em phải tự lực hoàn toàn. Nếu cần mở Bài học, Ôn nền, Sửa lỗi hoặc Lời giải để trợ giúp, hãy kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước. Nếu vào thẳng một phần hỗ trợ, chọn câu hoặc hoạt động em muốn trở về.

Khi nào hoàn tất lượt chính?

Hoàn tất lượt chính khi bài làm tự lực cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và những lỗi cản trở việc học tiếp đã được kiểm lại bằng câu phù hợp chưa gặp trước đó. Dùng bảng sau Kiểm tra (trang 26) để xem từng mục tiêu, không chỉ đếm đáp số đúng. Nếu chưa có câu mới phù hợp hoặc còn sai sau hỗ trợ, ghi rõ phần chưa xác nhận và tiếp tục phần đọc lập đủ nền.

Khi hoàn tất, ghi ngày gốc và hẹn Ôn lại sau khoảng 2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần. Em có thể học tiếp nội dung phù hợp trong khi chờ lịch ôn; kết quả làm được ngay sau học chưa cho biết em còn nhớ sau nhiều ngày.

Bài học

Câu hỏi dẫn đường

Từ công thức hoặc dữ kiện giới hạn, ta biết đồ thị tiến gần đường nào, ở phía nào, và còn điều gì chưa biết?

Trước mỗi kết luận, hãy xác định tập đang xét, hướng biến tiến tới và biểu thức cần lấy giới hạn. Sau đó nối kết quả với phương trình đường thẳng và đúng nhánh trên hình.

Học liệu chưa thực hiện toàn bộ quy trình khảo sát hàm số; không yêu cầu biện luận tham số hoặc tính đạo hàm trong các nhiệm vụ chính. Hai nhánh Phối hợp và Chuyển giao là lựa chọn thêm.

Khởi động

Tự làm bốn nhiệm vụ trên giấy trước khi mở lời giải. Sau khi đối chiếu, dùng bảng chọn phần cần ôn để xử lý thao tác nền còn vướng. Không cần tính điểm hoặc biết trước tên các đường tiệm cận.

Nhiệm vụ 01 – Giữ tập xác định khi rút gọn

Cho $r(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa. Ghi tập xác định, rút gọn biểu thức trên tập xác định ấy. Sau rút gọn, em có được thêm 10 vào tập xác định hoặc viết giá trị $r(10)$ không?

Xem lời giải (trang 47).

Nhiệm vụ 02 – Đọc hướng và xét dấu

Với $p(x) = -\frac{3}{x-1}$, hãy diễn tả $x \rightarrow 1^-$ và $x \rightarrow 1^+$ bằng lời. Ở mỗi phía, xác định dấu của mẫu rồi tính giới hạn tương ứng. Bài này chưa yêu cầu gọi tên đường tiệm cận.

Xem lời giải (trang 47).

Nhiệm vụ 03 – Xét riêng hai đầu vô cực

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x)$ với $q(x) = \frac{4x+1}{x+2}$. Viết phép chia cả tử và mẫu cho x để làm rõ kết quả; không thay “vô cực” vào công thức như một số.

Xem lời giải (trang 48).

Nhiệm vụ 04 – Kiểm thương và phần dư

Viết $A(x) = \frac{2x^2+x+5}{x+1}$ thành một biểu thức bậc nhất cộng phần dư trên mẫu. Ghi điều kiện của x , rồi kiểm phép chia bằng cách lấy mẫu nhân với thương và cộng phần dư. Bài này chỉ kiểm phép biến đổi, chưa yêu cầu kết luận về tiệm cận.

Xem lời giải (trang 48).

Điểm dừng 01 – Sau khi làm xong

Giữ bài làm rồi đối chiếu từng câu. Câu còn vướng chỉ ra đúng phần nền nên xem lại trong bảng dưới; không cần học lại mọi tài nguyên. Nếu đã rõ cả bốn thao tác, chuyển sang mục Giới hạn mô tả hành vi của hàm số (trang 5). Làm đúng Khởi động chưa có nghĩa đã đạt các mục tiêu của gói.

Chọn đúng phần cần ôn

Bài/điều còn vướng	Phần cần ôn	Trở lại bài
Nhiệm vụ 01	Mẫu khác 0 và điều kiện khi rút gọn. Xem Biến đổi phân thức (trang 32).	Trở về Nhiệm vụ 01 (trang 4), sửa điều kiện rồi tiếp tục
Nhiệm vụ 02	Hướng tiến gần và dấu của phân thức. Xem Giới hạn một phía (trang 31).	Trở về Nhiệm vụ 02 (trang 4), giải thích lại từng phía
Nhiệm vụ 03	Chia theo bậc và giới hạn ở hai đầu. Xem Giới hạn ở vô cực (trang 32).	Trở về Nhiệm vụ 03 (trang 4), kiểm hai hướng
Nhiệm vụ 04	Thương, phần dư và phép nhân kiểm lại. Xem Biến đổi phân thức (trang 32).	Trở về Nhiệm vụ 04 (trang 4), kiểm đúng phép biến đổi

Sau khi xem nền, tự làm câu của tài nguyên nếu chưa gặp trước đó rồi trở lại câu đang vướng. Lần sửa câu Khởi động đã xem lời giải giúp em học lại, không được tính là một câu xác nhận độc lập mới. Nếu một thao tác vẫn chưa rõ, ghi phần còn thiếu và đọc đúng phần giải thích; không tự đánh dấu đã đủ nền.

1. Giới hạn mô tả hành vi của hàm số

Gợi mở 01 – Giá trị tại điểm và hành vi lân cận

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Hai công thức cùng không xác định tại một hoành độ có buộc đồ thị có cùng hành vi ở gần đó không? Giá trị tại điểm và giới hạn khi tiến gần điểm ấy đang trả lời cùng một câu hỏi hay hai câu hỏi khác nhau?

Việc không xác định tại một điểm chưa cho biết hàm tiến tới đâu ở lân cận. Giá trị tại điểm và giới hạn cần được xét riêng. Hãy kiểm lại nhận xét này bằng hai hàm trong Ví dụ 01.

1.1. Giá trị, giới hạn tại điểm và giới hạn ở vô cực

Ba câu hỏi sau khác nhau:

- **Giá trị tại điểm:** $f(a)$ có được xác định không, và nếu có thì bằng bao nhiêu?
- **Giới hạn tại điểm:** khi x tiến gần a theo một phía được phép, $f(x)$ tiến tới đâu?
- **Giới hạn ở vô cực:** khi x tăng hoặc giảm không bị chặn trong tập xác định, $f(x)$ có hành vi thế nào?

Giới hạn xét các giá trị ở gần mốc, không tự bổ sung một điểm vào tập xác định. Khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$, ta cũng không thay “vô cực” vào công thức như thay một số.

1.2. Ví dụ 01 – Cùng loại một điểm, hành vi khác nhau

Xét

$$u(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad v(x) = \frac{x + 2}{x - 2}.$$

Cả hai hàm đều có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Với $x \neq 2$,

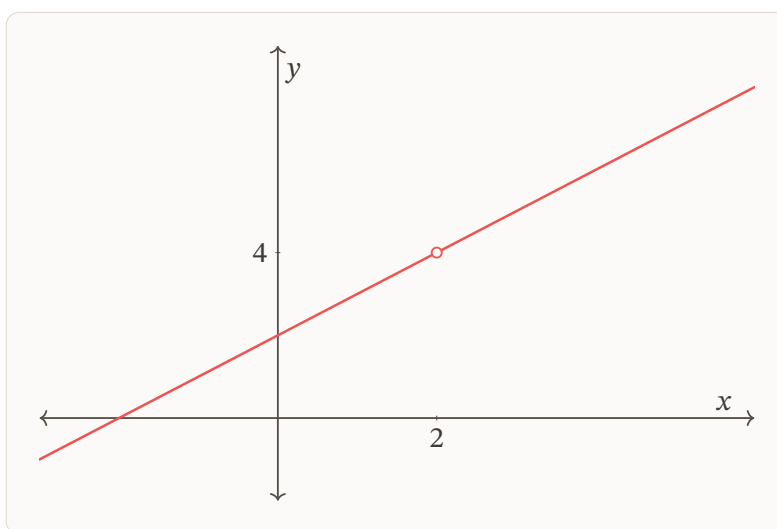
$$u(x) = x + 2.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = 4$, nhưng $u(2)$ vẫn không được xác định. Đồ thị u là đường $y = x + 2$ bỏ điểm $(2; 4)$.

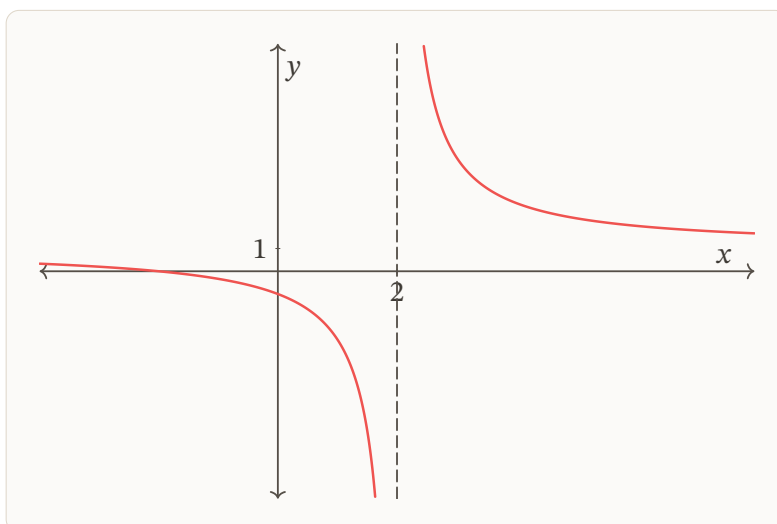
Với v , ta viết

$$v(x) = 1 + \frac{4}{x - 2}.$$

Khi $x \rightarrow 2^-$, mẫu âm và tiến tới 0 nên $v(x) \rightarrow -\infty$. Khi $x \rightarrow 2^+$, mẫu dương và tiến tới 0 nên $v(x) \rightarrow +\infty$. Việc cùng loại $x = 2$ không khiến hai hàm có cùng hành vi gần 2.



Hình 1. Giá trị tiến tới là 4, nhưng điểm $(2; 4)$ bị loại.



Hình 2. Cũng loại $x = 2$, nhưng tung độ không tiến tới một số hữu hạn.

1.3. Nhiệm vụ 05 – Rút gọn có thêm được một điểm không?

Cho $r(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa. Một bạn viết: “ $r(x) = x + 1$ nên $r(1) = 2$.” Hãy chỉ rõ phần đúng, phần sai; tìm giới hạn của $r(x)$ khi $x \rightarrow 1$.

Xem lời giải (trang 49). Nếu vướng điều kiện sau rút gọn, xem Biến đổi phân thức (trang 32), rồi trở lại câu này. Nếu đã hiểu, tiếp tục mục 2.

2. Tiệm cận ngang: xét riêng hai đầu vô cực

Gợi mở 02 – Hai đầu của đồ thị

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Khi $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 4$. Tung độ của điểm trên đồ thị đang tiến gần tung độ của đường thẳng nào? Dữ kiện này đã cho biết hành vi ở đầu trái chưa?

Ta đang so $f(x)$ với 4, tức so tung độ của điểm trên đồ thị với tung độ của đường $y = 4$. Dữ kiện chỉ nói về đầu phải. Định nghĩa dưới đây giúp gọi tên đường ấy và xét riêng từng đầu vô cực. Một điểm giao hữu hạn có mâu thuẫn với hành vi ở rất xa không? Hãy giữ câu hỏi này khi đọc các ví dụ.

2.1. Định nghĩa và ý nghĩa

Đường thẳng $y = L$ là một tiệm cận ngang của đồ thị $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong hai điều kiện sau đúng:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

trong đó L là số thực và hướng đang xét có nghĩa trên tập xác định.

Chẳng hạn, khi $f(x) \rightarrow L$ ở đầu phải, độ chênh tung độ $|f(x) - L|$ tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$. Đường ngang mô tả hành vi ở xa, không buộc đồ thị phải nằm về một phía của đường ở mọi điểm.

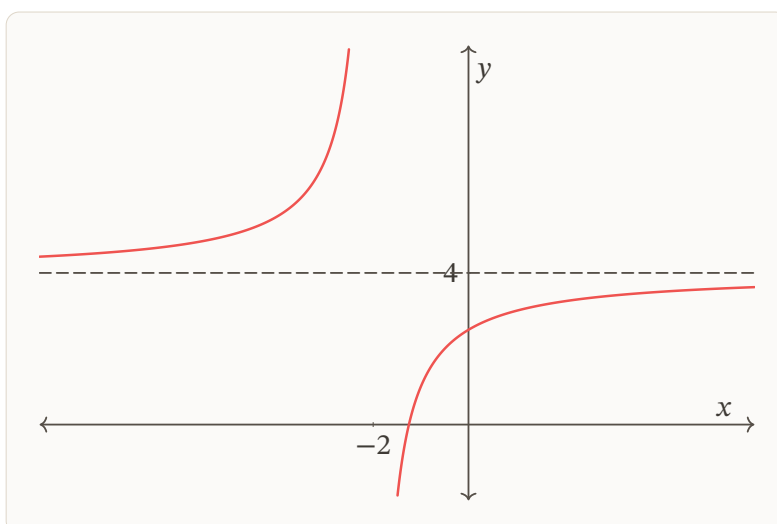
Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 3, trang 20 (trang 22 của tệp PDF), định nghĩa đường tiệm cận ngang.

2.2. Ví dụ 02 – Hai đầu cho cùng một đường

Cho $f(x) = 4 - \frac{3}{x+2}$, $x \neq -2$. Vì $\frac{3}{x+2} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4.$$

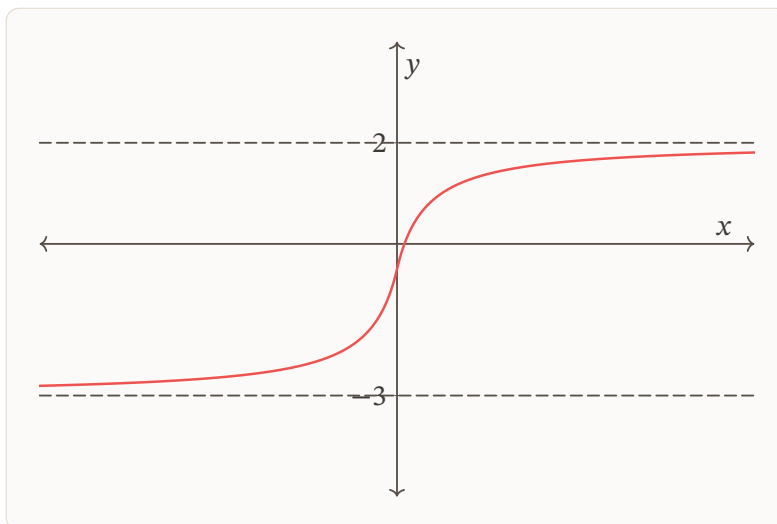
Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 4$. Hai giới hạn cùng bằng 4 xác định **một đường thẳng**, không phải hai tiệm cận khác nhau.



Hình 3. Đồ thị của f trong Ví dụ 02; nét đứt ngang biểu diễn $y = 4$.

2.3. Ví dụ 03 – Hai đầu có thể khác nhau

Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$. Đồ thị có hai tiệm cận ngang: $y = 2$ ở đầu phải và $y = -3$ ở đầu trái. Không được lấy kết quả của đầu phải áp cho đầu trái nếu chưa có căn cứ.



Hình 4. Một đồ thị phù hợp với hai giới hạn đã cho. Dữ kiện giới hạn xác định kết luận; hình giúp hình dung.

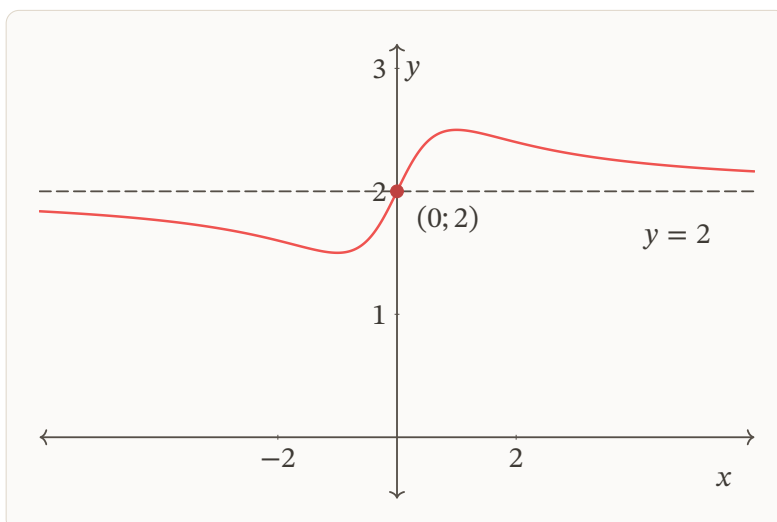
Với phân thức, có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa thích hợp của x để tính giới hạn. Cần xét riêng từng hướng mà tập xác định cho phép. Chẳng hạn, nếu tập xác định là $(4; +\infty)$, ta xét giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$; không xét $x \rightarrow -\infty$ vì các giá trị x trong tập này đều lớn hơn 4.

2.4. Ví dụ 04 – Cắt tiệm cận ngang tại một điểm

Xét $F(x) = 2 + \frac{x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$. Khi $x \neq 0$, ta có

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Vì vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 2$, nên $y = 2$ là tiệm cận ngang. Nhưng phương trình $F(x) = 2$ tương đương $x = 0$: đồ thị cắt đường ấy tại $(0; 2)$.



Hình 5. Điểm giao hữu hạn và giới hạn ở vô cực là hai thông tin cùng đúng.

Không có mâu thuẫn: định nghĩa tiệm cận ngang yêu cầu độ chênh tiến về 0 khi biến ra vô cực, không cấm độ chênh bằng 0 tại một hoành độ hữu hạn.

2.5. Nhiệm vụ 06 – Ghi cả đường và hướng

Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 3$. Hãy viết các tiệm cận ngang cùng hướng tương ứng. Một bạn chỉ ghi $y = -1$ đã đủ chưa?

Xem lời giải (trang 49). Nếu nhầm hướng, trở lại định nghĩa ở đầu mục này. Nếu chưa biết tính giới hạn ở vô cực, xem Ôn nền (trang 32), rồi trở lại nhiệm vụ đang làm.

3. Tiệm cận đứng: một phía vô cực đã đủ

Gợi mở 03 – Một phía tiến tới vô cực

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Khi $x \rightarrow 2^+$, $g(x) \rightarrow +\infty$. Hoành độ đang tiến gần mốc nào, từ phía nào? Tung độ có tiến tới một số hữu hạn không?

Hoành độ tiến tới 2 từ phải, còn tung độ tăng không bị chặn. Dữ kiện không gán $g(2)$ bằng vô cực: vô cực không phải một giá trị thực của hàm số. Nếu giới hạn trái hữu hạn, hành vi phía phải này có đủ để xác định một đường tiệm cận đứng không? Hãy đối chiếu với điều kiện trong định nghĩa dưới đây.

3.1. Định nghĩa và các phía được phép xét

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

Chỉ xét giới hạn từ phía có các giá trị thuộc tập xác định tiến sát a . Chỉ cần một giới hạn một phía bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ là đủ để kết luận $x = a$ là tiệm cận đứng. Nếu xét được cả hai phía, hai giới hạn không nhất thiết cùng bằng $+\infty$ hoặc cùng bằng $-\infty$. Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = a$.

Ở Ví dụ 01, v có tiệm cận đứng $x = 2$ vì giới hạn trái là $-\infty$ và giới hạn phải là $+\infty$. Với u , hai giới hạn tại 2 bằng 4, nên $x = 2$ không là tiệm cận đứng. **Điểm bị loại chỉ là mốc cần xem xét, chưa phải kết luận.**

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 3, trang 21 (trang 23 của tệp PDF), định nghĩa đường tiệm cận đứng.

3.2. Ví dụ 05 – Hai phía cùng đi lên

Cho $g(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$, $x \neq -3$. Khi x tiến tới -3 từ bất cứ phía nào, $(x+3)^2$ dương và tiến về 0. Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = +\infty.$$

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -3$. Dấu bình phương giải thích vì sao cả hai phía cùng $+\infty$; không áp mẫu “trái âm, phải dương” cho mọi phân thức.

Nếu hàm được gán riêng giá trị tại a ? Giá trị ấy không tự xóa một giới hạn vô cực ở lân cận. Để kiểm đường đứng, vẫn đọc đúng hành vi khi x tiến tới a . Ngược lại, chỉ biết $f(a)$ không tồn tại cũng chưa đủ để kết luận có tiệm cận đứng.

3.3. Nhiệm vụ 07 – Chỉ một phía có nghĩa

Hàm w có tập xác định $(-\infty; 5)$, liên tục trên khoảng này và $\lim_{x \rightarrow 5^-} w(x) = -\infty$. Có thể kết luận $x = 5$ là tiệm cận đứng không? Có cần thêm giới hạn phải tại 5 không?

Xem lời giải (trang 49). Nếu vướng kí hiệu hoặc dấu vô cực, dùng Giới hạn một phía (trang 31), rồi quay lại câu này.

4. Tiệm cận xiên: kiểm phần chênh lệch

Gợi mở 04 – Đường thẳng và phần chênh lệch

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Khi $x \rightarrow +\infty$, hiệu $h(x) - (x - 1)$ tiến tới 0. Em đang so tung độ của điểm trên đồ thị với tung độ của đường thẳng nào? Hiệu tiến về 0 cho biết điều gì?

Ta đang so $h(x)$ với $x - 1$, tức so tung độ của điểm trên đồ thị với tung độ của đường $y = x - 1$ có cùng hoành độ. Phần chênh lệch ấy tiến về 0 ở đâu phải. Định nghĩa dưới đây dùng chính giới hạn của hiệu để nhận biết tiệm cận xiên. Hai đường thẳng có cùng hệ số góc đã là cùng một đường chưa? Hãy lưu ý cả hệ số tự do khi kiểm giới hạn.

4.1. Định nghĩa bằng giới hạn của hiệu

Đường thẳng $y = ax + b$, với $a \neq 0$, là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

hoặc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Ở cùng một hoành độ x , hiệu $f(x) - (ax + b)$ là chênh lệch tung độ giữa đồ thị và đường thẳng. Khi hiệu tiến về 0, khoảng cách từ điểm trên đồ thị đến đường thẳng ấy cũng tiến về 0. Nếu $a = 0$, đường là đường ngang và ta dùng tên tiệm cận ngang.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 3, trang 23 (trang 25 của tệp PDF), định nghĩa đường tiệm cận xiên.

4.2. Ví dụ 06 – Tách phần tuyến tính và phần còn lại

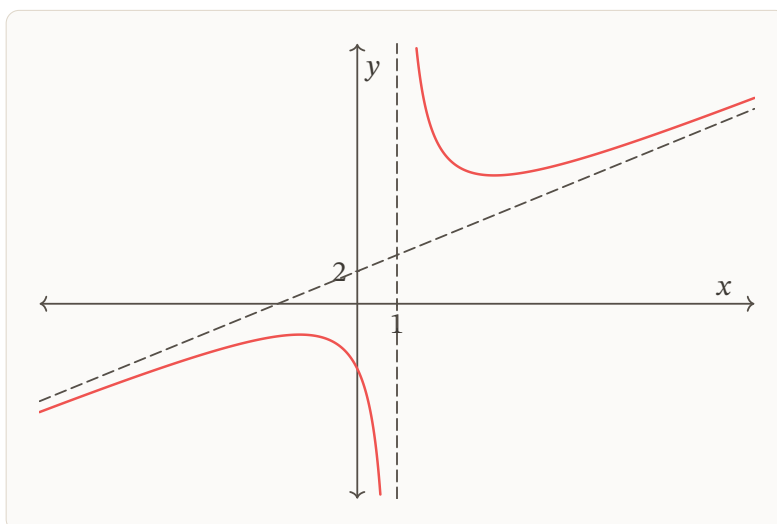
Cho $h(x) = \frac{x^2+x+4}{x-1}$, $x \neq 1$. Chia đa thức, ta được

$$h(x) = x + 2 + \frac{6}{x-1}.$$

Có thể kiểm ngay bằng $(x-1)(x+2) + 6 = x^2 + x + 4$. Suy ra

$$h(x) - (x + 2) = \frac{6}{x-1} \longrightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Vì thế $y = x + 2$ là tiệm cận xiên ở cả hai đầu. Muốn tìm thêm tiệm cận đứng, xét riêng giới hạn tại điểm loại $x = 1$; phần $\frac{6}{x-1}$ cho giới hạn trái $-\infty$ và phải $+\infty$, nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.



Hình 6. Đường xiên mô tả phần tuyến tính ở xa; giới hạn tại $x = 1$ trả lời câu hỏi khác.

Từ công thức đến thông tin trên hình. Với cùng hàm h trong Ví dụ 06, ta đi lần lượt:

Bước	Dữ kiện đã kiểm	Điều cần chỉ trên Hình 6
Giữ tập xác định	$x \neq 1$	Hai phần đồ thị nằm hai phía của mốc 1
Xét gần mốc	$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -\infty,$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty$	Nhánh trái đi xuống, nhánh phải đi lên không bị chặn khi tiến gần đường $x = 1$
Xét ở xa	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [h(x) - (x + 2)] = 0$	Mỗi đầu tiến gần đường $y = x + 2$ ở hướng tương ứng
Đọc vị trí tương đối	$h(x) - (x + 2) = \frac{6}{x-1}$	Nhánh bên trái nằm dưới đường xiên, nhánh bên phải nằm trên đường xiên

Khi phác riêng các thông tin tiệm cận, trước hết đặt đường đứng $x = 1$ và đường xiên $y = x + 2$; sau đó ghi hướng của các nhánh gần mốc và ở xa. Các giới hạn không tự cho mọi khoảng tăng giảm, điểm cực trị hoặc một hình dạng duy nhất ở giữa. Hình 6 được dựng từ công thức đầy đủ; không được lấy nét cong của hình làm kết luận đã chứng minh chỉ bằng tiệm cận.

4.3. Tìm đủ hai hệ số của đường tiệm cận xiên

Có thể tìm lần lượt hệ số góc và hệ số tự do bằng giới hạn. Ta phải chọn một hướng tiến ra vô cực và giữ nguyên hướng ấy trong cả hai phép tính.

- **Khi xét phía $x \rightarrow +\infty$, tính**

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$$

Nếu hai giới hạn trên tồn tại và hữu hạn, đồng thời $a \neq 0$, thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị khi $x \rightarrow +\infty$.

- **Khi xét phía $x \rightarrow -\infty$, tính riêng**

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

Nếu hai giới hạn này tồn tại và hữu hạn, đồng thời $a \neq 0$, thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị khi $x \rightarrow -\infty$.

Các giá trị a, b tìm được ở hai hướng có thể khác nhau. Không lấy a ở hướng này rồi ghép với b ở hướng kia. Nếu chỉ tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, em mới tìm được hệ số góc ở phía $x \rightarrow +\infty$, chưa biết hệ số tự do b để viết phương trình đường thẳng. Trường hợp phía $x \rightarrow -\infty$ cũng cần đủ hai bước như vậy.

Với hàm h trong Ví dụ 06, khi xét phía $x \rightarrow +\infty$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x(x-1)} \right] = 1,$$

nên $a = 1$. Tiếp theo,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{6}{x-1} \right] = 2.$$

Vậy đường tiệm cận xiên ở phía này là $y = x + 2$. Cách tách thương và phần dư ở trên cũng cho kết quả ấy, đồng thời giúp kiểm trực tiếp giới hạn của hiệu. Khi giải phân thức đơn giản, em có thể dùng cách tách này.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 3, trang 24 (trang 26 của tệp PDF), phần Chú ý và Nhận xét.

4.4. Nhiệm vụ 08 – Thiếu một hằng số

Cho $q(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x+6}$, $x \neq -6$. Một bạn chỉ nhìn hệ số của x và chọn $y = 2x$. Hãy tìm đường xiên đúng và dùng giới hạn của hiệu để bác đường đã chọn.

Xem lời giải (trang 50). Nếu chưa tách được một phân thức thành thương và dư, xem Biến đổi phân thức (trang 32). Sau đó quay về bài đang vướng; làm đúng phép chia vẫn cần bước kiểm giới hạn phần dư.

5. Giải thích kết quả theo điều kiện của mô hình

Gợi mở 05 – Điều kiện của mô hình cho phép xét giới hạn nào?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Một công thức tính được tại thời gian âm có cho phép dùng thời gian ấy trong mọi mô hình không?

Một giới hạn hữu hạn có luôn là giá trị được đạt không?

Khi dùng một mô hình, trước hết cần biết biến số được phép nhận những giá trị nào. Giới hạn cho biết giá trị hàm số tiến gần đến mức nào; muốn kết luận hàm số đạt mức ấy, phải tìm được một giá trị của biến thỏa điều kiện bài toán. Không dùng công thức ngoài phạm vi mà mô hình đã cho.

5.1. Chọn giới hạn theo câu hỏi và theo tập đang xét

Khi gặp một bài tiệm cận, hãy tự hỏi: biến đang tiến tới một giá trị hữu hạn hay ra vô cực? Với tập xác định đã cho, biến có thể tiến tới giá trị ấy từ bên trái, bên phải hay cả hai phía? Cần tính giới hạn của hàm số, hay giới hạn của hiệu giữa hàm số và một biểu thức bậc nhất?

Loại tiệm cận	Dữ kiện quyết định	Dạng phương trình
Ngang	$f(x)$ tiến tới số hữu hạn L ở một đầu vô cực	$y = L$
Đứng	$f(x)$ tiến tới $+\infty$ hoặc $-\infty$ ở ít nhất một phía của a	$x = a$
Xiên	$f(x) - (ax + b)$ tiến về 0 ở một đầu vô cực, $a \neq 0$	$y = ax + b$

Hình chỉ thể hiện một phần đồ thị. Nét vẽ trông gần một đường thẳng chưa đủ để kết luận đó là tiệm cận. Muốn kết luận chính xác, hãy dùng công thức hàm số, giới hạn được để cho hoặc những dữ kiện được ghi rõ trên hình.

Giới hạn của suy luận từ dữ kiện

Dữ kiện đang có	Có thể kết luận	Chưa đủ căn cứ để kết luận
Công thức và tập xác định	Tính giới hạn theo các hướng thuộc tập xác định, rồi dùng định nghĩa	Gọi nghiệm mẫu là tiệm cận đứng trước khi xét giới hạn
Một giới hạn hữu hạn ở đầu phải	Tiệm cận ngang ở đầu phải	Kết quả ở đầu trái hoặc kết luận không có đường đứng
Một phía tiến tới vô cực tại mốc	Tiệm cận đứng tại mốc ấy	Dấu hoặc giá trị giới hạn ở phía còn lại
Giới hạn hiệu với một đường xiên bằng 0	Tiệm cận xiên ở hướng đã xét	Vị trí trên/dưới ở mọi điểm, hoặc cắt giao điểm
Hình trong một cửa sổ hữu hạn	Vị trí, nhãn và quan hệ được để xác định rõ	Hành vi ở vô cực chỉ vì nét vẽ trông gần một đường
Công thức của mô hình và điều kiện của biến	Chỉ kết luận trong phạm vi áp dụng, với đơn vị và giả thiết đã cho	Tự mở rộng thời gian xét hoặc khẳng định điều chưa được kiểm chứng trong thực tế

5.2. Ví dụ 07 – Tiến tới một mức không có nghĩa đạt mức ấy

Trong một mô hình giả định, nồng độ sau t giờ được cho bởi

$$c(t) = 5 + \frac{12}{t+1} \quad (t \geq 0),$$

với c tính bằng mg L^{-1} . Khi $t \rightarrow +\infty$, phần $\frac{12}{t+1}$ tiến về 0, nên $c(t) \rightarrow 5$. Đồ thị của hàm số trong mô hình có tiệm cận ngang $c = 5$: mô hình dự báo nồng độ tiến gần 5 mg L^{-1} khi thời gian tăng.

Với mọi $t \geq 0$, ta có $\frac{12}{t+1} > 0$, nên $c(t) > 5$. Vì vậy không có thời điểm nào trong mô hình cho nồng độ bằng 5 mg L^{-1} . Mô hình chỉ xét $t \geq 0$; những thời điểm này không thể tiến sát -1 . Do đó $t = -1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình đã cho.

Kết luận trên thuộc mô hình đã cho, không là khẳng định thực nghiệm về mọi quá trình thay đổi nồng độ.

5.3. Nhiệm vụ 09 – Không tự mở rộng điều kiện của mô hình

Một chỉ số được mô hình hóa bởi $z(t) = 10 + \frac{8}{t+2}$, với thời gian $t \geq 0$ tính bằng giờ và z tính bằng điểm. Hãy tính giới hạn khi $t \rightarrow +\infty$ và giải thích ý nghĩa. Có thời điểm hữu hạn nào trong mô hình để chỉ số bằng 10 không? Đường $t = -2$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình này không? Vì sao?

Xem lời giải (trang 50). Nếu nhầm giới hạn với giá trị được đạt hoặc dùng thời điểm ngoài điều kiện của mô hình, xem lại Ví dụ 07 (trang 16) trong mục này, rồi quay lại bài đang làm.

6. Sửa một lập luận và tự kiểm lại

Gợi mở 06 – Đọc lời chữa và tự kiểm lại

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Em đọc lời chữa và thấy hợp lí. Điều đó đã đủ để biết em sẽ tự phát hiện và sửa được lỗi khi dữ kiện đổi từ công thức sang giới hạn cho sẵn chưa? Khi một lập luận có cả phần đúng và phần sai, em cần giữ lại điều gì?

Đọc hiểu lời chữa chưa cho biết em có tự làm được tình huống khác hay không. Hãy giữ phần đúng, tìm đúng bước suy luận sai, sửa căn cứ rồi tự làm câu phù hợp chưa gặp trước đó. Ví dụ và câu Nhiệm vụ trong Bài học dưới đây giúp phân biệt các việc ấy.

6.1. Ví dụ 08 – Giữ phần đúng khi sửa

Cho $u(x) = \frac{x^2-121}{x-11}$, với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa. Một bạn viết: “Hàm không xác định tại 11, nên $x = 11$ là tiệm cận đứng; rút gọn được $u(x) = x + 11$, nên $u(11) = 22$.”

- **Phần đúng:** giá trị 11 không thuộc tập xác định; phép rút gọn đúng khi $x \neq 11$.
- **Bước sai:** dùng việc không xác định để kết luận giới hạn vô cực; sau đó dùng biểu thức rút gọn để thêm giá trị ngoài tập xác định.
- **Kiểm lại căn cứ:** $\lim_{x \rightarrow 11^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 11^+} u(x) = 22$, là giới hạn hữu hạn.
- **Viết lại:** “Hàm có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{11\}$. Trên tập xác định này, $u(x) = x + 11$. Hai giới hạn tại 11 bằng 22, nên $x = 11$ không là tiệm cận đứng; $u(11)$ vẫn không được xác định.”

Ví dụ đã cho lời chữa, vì vậy không dùng việc chép lại lời chữa làm bằng chứng mới. Nhiệm vụ dưới đây đổi sang dữ kiện giới hạn có sẵn và giữ một giá trị riêng tại mốc.

6.2. Nhiệm vụ 10 – Có giá trị tại mốc vẫn cần xét lân cận

Một hàm g xác định trên $\mathbb{R}$, có $g(2) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$. Một bạn nói: “Điểm $(2; 5)$ thuộc đồ thị, nên $x = 2$ không thể là tiệm cận đứng.”

Hãy giữ phần đúng, chỉ bước suy luận sai, viết lại toàn bộ câu và nêu điều chưa biết về giới hạn trái tại 2.

Tiêu chí tự kiểm: phân biệt giá trị tại mốc với giới hạn phải; dùng đúng điều kiện đủ của đường đứng; giữ dữ kiện đúng và không tự gán giới hạn trái.

Xem lời giải (trang 50). Nếu nhầm giá trị hàm số tại một điểm với giới hạn khi biến tiến tới điểm đó, xem lại định nghĩa tiệm cận đứng (trang 10). Nếu chưa hiểu kí hiệu giới hạn từ bên trái hoặc bên phải, xem Giới hạn một phía (trang 31). Cách chọn bài kiểm tra lại được chỉ dẫn trong Sửa lỗi (trang 34).

6.3. Ghi lại điều đã sửa

Một dòng ghi lỗi có ích nêu: bước sai, điều kiện đã bỏ, cách sửa, câu mới đã tự làm và kết quả thực. Chẳng hạn với nhiệm vụ vừa làm, cần ghi rõ em có tách giá trị tại mốc khỏi giới hạn phải hay không; không chép sẵn “đã đạt”. Nếu chỉ làm đúng sau trợ giúp, giữ riêng kết quả ấy với bài ban đầu.

Dùng danh sách dấu hiệu và câu hỏi tự sửa (trang 37) để chọn đúng phần xem lại. Một câu mới làm đúng chỉ xác nhận mục tiêu mà câu ấy thực sự kiểm. Hẹn Ôn lại toàn gói khi hoàn tất lượt chính; nếu cần kiểm sớm riêng lỗi vừa sửa, ghi lịch riêng.

Khép lại bài học

Giới hạn vừa giúp xác định đường tiệm cận, vừa giúp giải thích điều đồ thị đang biểu diễn. Với điểm hữu hạn, hãy tách giá trị tại điểm khỏi hành vi ở lân cận. Ở vô cực, hãy xét riêng từng hướng. Với đường xiên, dừng dừng ở hệ số góc: phần chênh lệch phải tiến về 0.

Trước khi chuyển hoạt động, hãy tự nói lại:

- Tập xác định cho phép xét những hướng nào, và giới hạn khác giá trị tại điểm ra sao?
- Vì sao một phía vô cực đủ cho đường đứng, còn một điểm bị loại thì chưa đủ?

- Hai đầu cho mấy đường ngang khác nhau? Đường xiên được kiểm bằng hiệu nào?
- Điều gì trong hình là đủ kiện, điều gì chỉ giúp hình dung?
- Một giới hạn trong mô hình nói gì về mức tiến tới và việc đạt mức ấy?
- Em đã sửa lí do và tự làm câu phù hợp chưa gặp trước đó, hay mới đọc hiểu đáp án?

Ý nào chưa giải thích được thì trở lại đúng mục tương ứng. Các câu Nhiệm vụ trong Bài học giúp kiểm ngay sau học, chưa chứng nhận mọi mục tiêu hoặc khả năng nhớ sau nhiều ngày.

Những kiến thức về đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đã học giúp em sử dụng thêm kết quả về tiệm cận để khảo sát và đọc đồ thị. Em có thể chuyển sang Luyện tập (trang 19), chọn Kiểm tra (trang 24) nếu đã chuẩn bị, hoặc ghi nơi cần tiếp tục trong Nhật kí (trang 45).

Luyện tập

Hãy tự làm trước khi mở lời giải. Khi vướng, xác định em chưa hiểu khái niệm hay chưa làm được thao tác nền, rồi chọn đúng phần hỗ trợ cần mở. Việc xem lại không bắt em phải học lại từ đầu. Giữ bài ban đầu để thấy phần nào đã tự làm được.

Chặng	Trọng tâm luyện tập	Nhiệm vụ và Điểm dừng
Tập xác định, hướng và ngang/đứng	Giữ tập xác định; xét đúng phía; phân biệt đường ngang với đường đứng	Nhiệm vụ 11–15; Điểm dừng 02 (trang 20)
Phần dư, hình và mô hình	Kiểm đường xiên; đọc đúng nhánh; giữ điều kiện của biến và đơn vị của mô hình	Nhiệm vụ 16–20; Điểm dừng 03 (trang 22)

Nếu chưa làm được thao tác nền, mở đúng thẻ Ôn nền và tự làm câu của thẻ trước khi trở về. Nếu đã hiểu kiến thức nhưng lập luận chưa đúng, giữ bài ban đầu, tìm bước sai rồi dùng hướng dẫn trong Sửa lỗi (trang 34). Trên bản in có lời giải, tra đúng tên nhóm và số nhiệm vụ; trên màn hình, dùng liên kết của câu đang làm.

Chặng 1 – Tập xác định, hướng và các đường ngang/đứng

Mục tiêu: giữ điểm loại sau rút gọn; xét đúng phía và từng đầu vô cực; giải thích được điều kiện tiệm cận đứng. Làm các nhiệm vụ 11–15 rồi đối chiếu tại Điểm dừng 02.

Nhiệm vụ 11 – Từ giới hạn đến đường thẳng

Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định, có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Viết các tiệm cận ngang và đứng của đồ thị. Mỗi kết luận cần kèm dữ kiện quyết định. Hai giới hạn ở vô cực cho một hay hai đường ngang?

Xem lời giải (trang 51). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 7), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 12 – Tìm tập xác định trước khi tính

Tìm các tiệm cận ngang, đứng của $f(x) = \frac{5x+2}{x-3}$. Ghi tập xác định và tính giới hạn một phía tại điểm bị loại.

Xem lời giải (trang 51). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 10), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 13 – Một điểm hở

Cho $u(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa. Kiểm nhận định “ $x = 3$ là tiệm cận đứng”. Nếu rút gọn được $u(x) = x + 3$, em có được viết $u(3) = 6$ không? Bài này chỉ yêu cầu xét mốc $x = 3$.

Xem lời giải (trang 52). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 5), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 14 – Chỉ có một phía để tiến gần

Cho $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ trên $D = (4; +\infty)$. Tìm tiệm cận ngang, đứng của đồ thị. Giải thích vì sao không phải xét $x \rightarrow 4^-$.

Xem lời giải (trang 52). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 31), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 15 – Không bỏ sót đầu trái

Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. Viết các đường tiệm cận ngang và ghi đường nào ứng với đầu trái, đầu phải. Có thể chỉ từ hai dữ kiện này kết luận rằng đồ thị không có tiệm cận đứng không?

Xem lời giải (trang 53). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 7), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Điểm dừng 02

Xem lời giải (trang 51) rồi đối chiếu bài làm. Kiểm ba điều: em giữ tập xác định ở nhiệm vụ 13–14; ghi đúng đường/hướng ở nhiệm vụ 11–12 và 05; hiểu vì sao một phía đủ trong nhiệm vụ 14.

- Nếu cả kết luận và lí do đều đúng, em có thể sang chặng 2 hoặc chọn hoạt động phù hợp khác.
- Nếu nhầm điểm loại, gọi Nhiệm vụ 35 của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 37).
- Nếu nhầm dấu/phía, xem nền giới hạn một phía (trang 31), rồi dùng Nhiệm vụ 36 của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 38) nếu câu chưa gặp trước đó.
- Nếu bỏ sót đầu trái, xem lại mục 2 và dùng Nhiệm vụ 37(a) của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 38).

Sau hỗ trợ, trở lại Điểm dừng này và kiểm đúng tiêu chí còn thiếu. Bài đã xem lời giải vẫn dùng để học, nhưng không tính là kết quả tự làm một bài mới. Không cần vào tất cả nhánh khi đã đạt.

Nếu còn vướng tập xác định hoặc giới hạn một phía, chưa ghi đã đạt phần ấy. Em vẫn có thể làm phần độc lập mà mình đủ nền; phần cần thao tác đang thiếu phải được học lại trước khi kết luận đã làm chủ. Khi câu xác nhận phù hợp đã gặp trước đó hoặc còn sai, dùng quy tắc khi hết câu mới (trang 44); không lấy để Kiểm tra hoặc Ôn lại để luyện trước.

Chặng 2 – Phần dư, hình đồ thị và mô hình

Mục tiêu: tìm đủ đường xiên; kiểm kết luận bằng giới hạn; nối dữ kiện với hình; diễn giải đúng điều kiện của biến. Số nhiệm vụ tiếp tục từ chặng trước.

Nhiệm vụ 16 – Thương và phần dư

Tìm các tiệm cận đứng, xiên của $f(x) = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$. Kiểm phép chia bằng cách lấy mẫu nhân với thương và cộng phần dư; sau đó kiểm giới hạn của hiệu với đường xiên.

Xem lời giải (trang 53). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 12), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 17 – Đừng bỏ mất hệ số tự do

Một bạn nói đồ thị $g(x) = \frac{2x^2-x+4}{x-2}$ có tiệm cận xiên $y = 2x$ vì “tỉ số hệ số cao nhất bằng 2”. Hãy kiểm nhận định này, tìm đường xiên đúng và chỉ rõ giới hạn nào bác đường $y = 2x$.

Xem lời giải (trang 54). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 12), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 18 – Cắt mà vẫn tiến sát

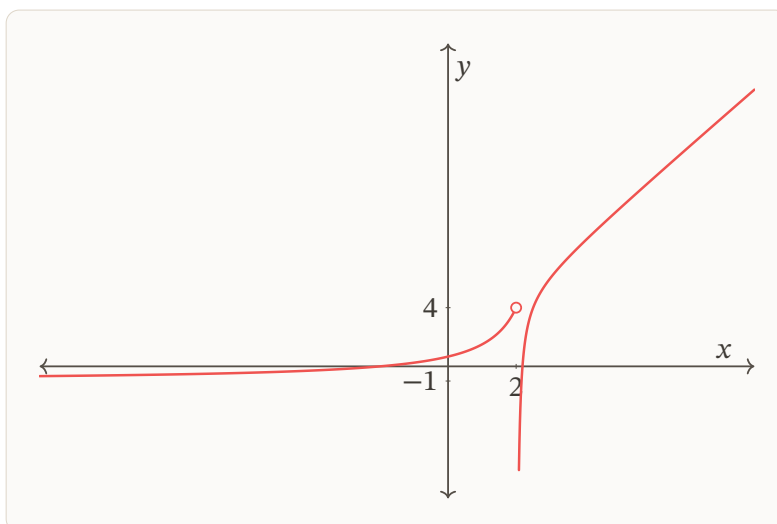
Cho $f(x) = 3 + \frac{x-1}{x^2+1}$. Chứng minh $y = 3$ là tiệm cận ngang, rồi tìm giao điểm của đồ thị với $y = 3$. Kết quả có mâu thuẫn với định nghĩa không?

Xem lời giải (trang 54). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 15), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 19 – Một hình, ba hành vi

Hình sau biểu diễn một hàm xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Hình đi kèm các dữ kiện chính xác:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0.$$



Hình 13

- Nêu các tiệm cận suy ra từ dữ kiện và chỉ vị trí/hướng tương ứng trên hình.
- Một bạn bác $x = 2$ là tiệm cận đứng vì giới hạn trái bằng 4. Bạn ấy sai ở đâu?
- Giải thích vì sao không dùng một đoạn đồ thị nhìn “gần thẳng” trong ảnh để thay phép kiểm giới hạn.

Xem lời giải (trang 55). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 15), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Nhiệm vụ 20 – Nhiệt độ trong mô hình

Một mô hình giả định cho nhiệt độ sau t giờ là $h(t) = 6 + \frac{18}{t+2}$ ($^{\circ}\text{C}$), $t \geq 0$.

- Nêu tiệm cận ngang và ý nghĩa trong mô hình.
- Có thời điểm hữu hạn nào nhiệt độ đúng bằng 6°C không?
- Một bạn dùng mẫu $t + 2$ để gọi $t = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị mô hình. Hãy kiểm cách kết luận ấy.

Xem lời giải (trang 55). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 15), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Điểm dừng 03

Đối chiếu nhiệm vụ 16–20. Em cần kiểm phần dư ở 06–07, hiểu giao điểm trong 08, nối đúng cả ba hành vi ở 09 và giữ điều kiện của biến và đơn vị trong 10.

- Thiếu phần dư hoặc hệ số tự do: Biến đổi phân thức (trang 32), rồi Nhiệm vụ 38(a) của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 38).
- Cho rằng đồ thị không được cắt tiệm cận: xem lại định nghĩa, rồi Nhiệm vụ 37(b) của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 38).
- Diễn giải vượt tập đang xét hoặc nhầm mức đạt được: mục 5, rồi Nhiệm vụ 38(b) của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 38).
- Nếu nhầm cách đọc hình ở nhiệm vụ 19, xem lại cách nối dữ kiện với từng nhánh ở mục 5. Khi cần tự kiểm lại bằng hình khác, dùng Nhiệm vụ 39 của Sửa lỗi sau Luyện tập (trang 39) nếu chưa gặp trước đó, rồi trở về Điểm dừng này. Không dùng một câu ở nhiều nơi như thế đó là nhiều lần xác nhận khác nhau.

Khi đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin, em có thể làm Kiểm tra hoặc chọn nhánh tự chọn dưới đây. Quyền bắt đầu không có nghĩa các mục tiêu còn vướng đã đạt. Nếu chưa có câu mới phù hợp hoặc còn sai, ghi rõ mục tiêu chưa xác nhận và xem lại đúng phần; chỉ dùng kết quả của phần đã tự làm được. Không bắt làm hai nhánh thêm để được vào Kiểm tra.

Phối hợp – lựa chọn thêm

Nhiệm vụ 21 – Tiệm cận và giá trị không đạt

Chọn bài này nếu em đã học giá trị lớn nhất và nhỏ nhất hoặc có nền tương ứng. Với $C(x) = 2 + \frac{6}{x+1}$ trên $x \geq 0$, hãy tìm GTLN, GTNN nếu có và giải thích quan hệ với tiệm cận ngang.

Xem lời giải (trang 56). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 15), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Chuyển giao – lựa chọn thêm

Nhiệm vụ 22 – Hai đường xiên khác nhau

Chọn bài này nếu em đọc được giới hạn căn và $\sqrt{x^2} = |x|$ ở phần nền. Với $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, hãy kiểm tra $y = x$ ở $+\infty$ và $y = -x$ ở $-\infty$ bằng cách nhân liên hợp. Có được lấy một đường làm đáp án cho cả hai đầu không?

Xem lời giải (trang 56). Nếu cần, xem lại đúng phần đang vướng (trang 32), rồi trở lại nhiệm vụ này.

Kiểm tra

Thời gian đề xuất: 40 phút. **Tổng điểm:** 20. Thời gian là gợi ý cho lượt đầu và cần điều chỉnh sau sử dụng; thang điểm giúp phân tích bài làm, không mô phỏng thang điểm thi tốt nghiệp.

Em có thể bắt đầu nếu đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin. Trong lượt này, tự làm cả năm nhiệm vụ, không mở Bài học, Ôn nền, Sửa lỗi hoặc Lời giải để trợ giúp. **Một lượt không chia thành nhiều đợt/buổi rồi ghép thành cùng một kết quả độc lập.** Nếu cần nhận trợ giúp, hãy kết thúc lượt, giữ bài làm ban đầu; phần làm sau hỗ trợ được ghi riêng.

Ghi tập xác định, hướng giới hạn và lí do, không chỉ đáp án. Chuẩn bị giấy và đồng hồ; ghi thời điểm bắt đầu, kết thúc và phần chưa làm được. Nếu dùng thời gian khác đề xuất, ghi đúng thời gian thực. Chỉ mở hướng dẫn chấm sau khi kết thúc lượt; giữ bài ban đầu trước khi sửa. Đây là kiểm tra mục tiêu của gói, không phải để mô phỏng thi quốc gia.

Nhiệm vụ 23 – Hai hàm ở cùng một mốc

4 điểm.

Cho $p(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ và $q(x) = \frac{3}{(x-4)^2}$, mỗi hàm lấy tập xác định tự nhiên.

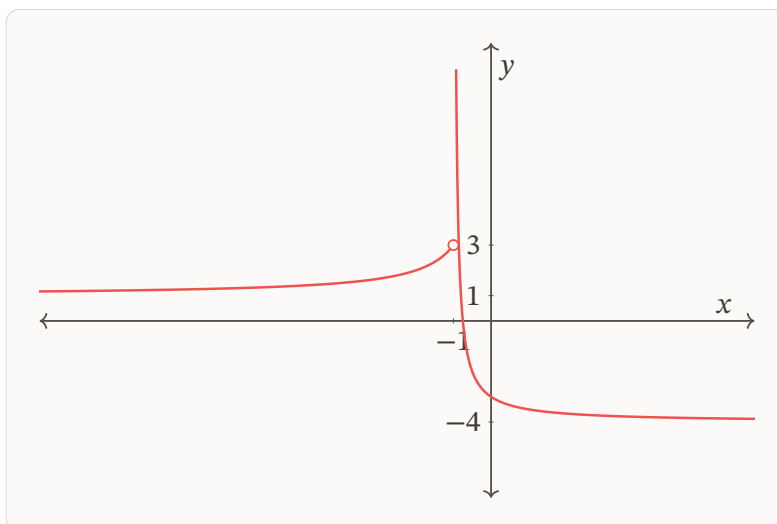
- Viết tập xác định của từng hàm.
- Tính các giới hạn một phía tại 4.
- Với mỗi đồ thị, $x = 4$ có là tiệm cận đứng không? Giải thích và cho biết có được gán $p(4) = 8$ sau rút gọn không.

Nhiệm vụ 24 – Đọc hai đầu và một mốc hữu hạn

4 điểm.

Một hàm f xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định, có hình dưới đây. Các dữ kiện đi kèm là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$



Hình 14

- Viết các tiệm cận ngang, đứng và ghi hướng cho từng kết luận.
- Chỉ trên hình nhánh nào phù hợp với mỗi giới hạn.
- Giới hạn trái hữu hạn tại -1 có làm mất tiệm cận đứng ở mốc ấy không?

Nhiệm vụ 25 – Đường xiên cần đủ hai hệ số

5 điểm.

Cho $f(x) = \frac{2x^2+3x+8}{x+1}$, với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa.

- Ghi tập xác định và tách phân thức thành phần bậc nhất cộng phần dư trên mẫu.
- Tìm tiệm cận xiên, kiểm giới hạn hiệu ở hai đầu.
- Một bạn chọn $y = 2x$. Dùng giới hạn để kiểm đường ấy.
- Tìm tiệm cận đứng bằng giới hạn một phía.

Nhiệm vụ 26 – Một phản ví dụ cần hai điều

3 điểm.

Với $g(x) = -2 + \frac{x+3}{x^2+4}$, xét nhận định “Nếu đồ thị cắt $y = -2$ thì $y = -2$ không thể là tiệm cận ngang”.

- Tính giới hạn ở hai đầu và kết luận tiệm cận ngang.
- Tìm giao điểm của đồ thị với đường ấy, kiểm tra giá trị đang xét có thuộc tập xác định hay không.
- Đánh giá nhận định và giải thích quan hệ giữa hai kết quả.

Nhiệm vụ 27 – Giới hạn của mô hình

4 điểm.

Một mô hình giả định mô tả nồng độ sau t phút: $A(t) = 9 + \frac{20}{t+4}$ (mg L⁻¹), $t \geq 0$.

- Nêu đường tiệm cận ngang và diễn giải giới hạn với đúng đơn vị.
- Kiểm xem mức 9 mg L⁻¹ có được đạt ở thời điểm hữu hạn không.
- Kiểm việc gọi $t = -4$ là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số trong mô hình.

Điểm dừng 04 – Sau khi kết thúc lượt Kiểm tra

Giữ bài ban đầu rồi mới Xem lời giải (trang 57). Đối chiếu theo từng khả năng:

Mục tiêu cần kiểm	Bài làm cần đối chiếu	Biểu hiện cần có
Giữ tập xác định; phân biệt giới hạn và giá trị	Nhiệm vụ 23 (trang 24) (a), Nhiệm vụ 23 (trang 24) (c), Nhiệm vụ 25 (trang 25) (a), Nhiệm vụ 27 (trang 26) (c)	Giữ điều kiện xác định sau rút gọn; không coi giới hạn là giá trị hàm số tại điểm bị loại; giữ đúng điều kiện thời gian của mô hình
Xét ngang theo từng đầu	Nhiệm vụ 24 (trang 24) (a), Nhiệm vụ 26 (trang 25) (a)	Ghi đúng phương trình và hướng; phân biệt hai đường khác nhau với một đường ở hai đầu
Điều kiện đứng, dấu và phía	Nhiệm vụ 23 (trang 24) (b–c), Nhiệm vụ 24 (trang 24) (c), Nhiệm vụ 25 (trang 25) (d)	Có ít nhất một giới hạn vô cực hợp lệ; giữ đúng dấu và không đòi cả hai phía
Tìm đường xiên và kiểm tra giới hạn của hiệu	Nhiệm vụ 25 (trang 25) (a–c)	Phần bậc nhất có đủ hai hệ số; hiệu tiến về 0 ở hướng đã ghi; bác đường sai bằng giới hạn
Nối dữ kiện với hình	Nhiệm vụ 24 (trang 24) (b), đọc cùng Nhiệm vụ 24 (trang 24) (a–c)	Chỉ đúng từng nhánh, mốc và hướng; chỉ ghi đúng phương trình chưa đủ
Phản biện việc cắt tiệm cận	Nhiệm vụ 26 (trang 25) (a–c)	Có giới hạn, giao điểm hợp lệ và lời giải thích vì sao cùng đúng
Diễn giải mô hình	Nhiệm vụ 27 (trang 26) (a–c)	Đúng mức, đơn vị, sự đạt được và tập đang xét; không dùng mốc ngoài tập đang xét
Đánh giá và sửa lập luận	Nhiệm vụ 25 (trang 25), ý c; Nhiệm vụ 26 (trang 25), ý c; Nhiệm vụ 27 (trang 26), ý c	Chỉ ra kết luận sai và dữ kiện bác bỏ; giữ phần đúng, sửa lí do và điều kiện cần thiết. Kết quả sau hỗ trợ được ghi riêng với bài làm ban đầu.

Ghi “tự làm đúng”, “còn thiếu lí do”, “sai/chưa làm được” hoặc “đã nhận hỗ trợ” theo bài thực. Nếu sai, dùng bảng Chọn bài sửa lỗi (trang 34), giữ riêng kết quả ban đầu và kết quả sau sửa. Không lấy tổng số câu đúng che một mục tiêu thiết yếu còn vướng.

Hoàn tất lượt chính khi em tự làm được theo các mục tiêu thiết yếu và các lỗi cản trở việc học tiếp đã được kiểm lại bằng câu chưa gặp trước đó. Nếu còn nhầm cách đọc hình ở Nhiệm vụ 24 của Kiểm tra, dùng Nhiệm vụ 43 của Sửa lỗi sau Kiểm tra (trang 41) khi chưa xem đáp án; chỉ đúng nhánh và giải thích từng giới hạn rồi trở về điểm này. Nếu câu ấy đã gặp trước đó, làm theo hướng dẫn khi hết bài mới (trang 44). Câu chỉ tính từ công thức không thay cho phần đọc hình.

Khi hoàn tất lượt chính, hẹn Ôn lại. Em có thể tiếp tục học phần khác phù hợp tiên quyết trong lúc chờ ngày ôn; không bắt chờ xong tất cả lượt ôn mới được học tiếp.

Ôn lại

Gợi ý lịch tính từ ngày hoàn tất lượt chính: lượt 1 sau 2–3 ngày; lượt 2 khoảng 7 ngày; lượt 3 khoảng 3–4 tuần. Ghi ngày thực. Nếu vừa sửa lại một mục tiêu, hẹn kiểm gần hơn cho riêng mục tiêu ấy và giữ lịch sử cũ. Khi sát kì thi, chỉ kết luận về khoảng trễ đã thực sự quan sát.

Tự làm trước, giữ kết quả rồi đối chiếu. Nếu cần trợ giúp, ghi riêng phần sau hỗ trợ. Mỗi lượt chỉ ôn và kiểm lại những khả năng nêu bên dưới; đủ ba lượt không tự chứng nhận mọi tình huống của chủ đề.

Thời điểm ôn	Nhiệm vụ cần tự làm	Điểm dừng
Sau khoảng 2–3 ngày	Nhớ lại tập xác định và giới hạn (trang 28)	Điểm dừng 05 (trang 28)
Sau khoảng 7 ngày	Phần dư và giao điểm (trang 29)	Điểm dừng 06 (trang 29)
Sau khoảng 3–4 tuần	Chọn điều cần kiểm (trang 29)	Điểm dừng 07 (trang 30)

Ghi ngày gốc và các ngày hẹn vào Nhật kí. Đóng phần Bài học và Lời giải khi tự nhớ và làm; chỉ mở trợ giúp sau khi giữ bài ban đầu. Không làm trước nhiệm vụ của lượt sau để lấp chỗ thiếu ở lượt hiện tại. Lần kiểm riêng một lỗi không thay ngày gốc hoặc toàn bộ lượt Ôn lại.

Lượt 1

Nhiệm vụ 28 – Nhớ lại tập xác định và giới hạn

Thời điểm: sau khoảng 2–3 ngày. **Mục tiêu:** phân biệt tập xác định, giới hạn tại mốc và đường ngang ở hai đầu. **Lỗi cần quan sát:** gọi điểm loại là đường đứng; bỏ dấu/phía; chỉ xét một đầu. Sau bài, về Điểm dừng 05 (trang 28).

- Xét riêng mốc 5 đối với $u(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ và $v(x) = \frac{2}{x-5}$ với tập xác định của mỗi hàm gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa. Viết giới hạn tại mốc, kết luận về tiệm cận đứng và giữ đúng giá trị có/không xác định.
- Tìm tiệm cận ngang của $w(x) = \frac{7x-4}{2x+1}$. Ghi hướng đã kiểm.

Xem lời giải (trang 61).

Điểm dừng 05

Kiểm lại hai việc: em phân biệt giới hạn hữu hạn với vô cực tại cùng mốc; em viết đúng đường ngang theo hai hướng. Nếu sai ý về tập xác định hoặc dấu, chọn đúng ý ở Nhiệm vụ 44 của Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 42); nếu sai giới hạn phân thức ở vô cực, xem Giới hạn ở vô cực (trang 32) rồi dùng một câu hai đầu chưa gặp trước đó trong bảng chọn sửa lỗi (trang 34).

Sau hỗ trợ, trở về điểm này và ghi phần tự làm trước trợ giúp riêng với phần đã sửa. Nếu đã giải thích đúng, giữ lịch lượt tiếp theo; lượt này chưa kiểm đường xiên, đọc hình hoặc mô hình.

Lượt 2

Nhiệm vụ 29 – Phần dư và giao điểm

Thời điểm: sau khoảng 7 ngày. **Mục tiêu:** kiểm đường đứng, đường xiên và lập luận về giao điểm.

Lỗi cần quan sát: chia sai, thiếu hằng số; không kiểm tra giới hạn của hiệu; coi giao điểm là mâu thuẫn. Sau bài, về Điểm dừng 06 (trang 29).

- Tìm tiệm cận đứng, xiên của $f(x) = \frac{x^2-3x+8}{x-2}$; viết bước kiểm phần dư.
- Cho $g(x) = 1 + \frac{x-2}{x^2+9}$. Xác định tiệm cận ngang và giao điểm với đường ấy. Dùng kết quả để trả lời: cắt một tiệm cận có trái định nghĩa không?

Xem lời giải (trang 62).

Điểm dừng 06

Em cần có phần dư đúng, giới hạn hiệu bằng 0, dấu hai phía tại điểm loại và lập luận về giao điểm. Sai phần xiên hoặc giao điểm thì chọn đúng ý ở Nhiệm vụ 45 của Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 42); sai dấu/phía thì dùng Nhiệm vụ 44(b) của Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 42), nếu các ý chưa gặp trước đó.

Quay về điểm này sau khi đối chiếu, ghi kết quả đúng phần đã tự làm được rồi giữ lịch lượt sau. Lượt này chưa kiểm cách diễn giải mô hình.

Lượt 3

Nhiệm vụ 30 – Chọn điều cần kiểm

Thời điểm: sau khoảng 3–4 tuần. **Nội dung tự kiểm tra:** tập xác định, hướng giới hạn, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên và cách giải thích mô hình theo các ý dưới. Chú ý những lỗi: đoán tiệm cận từ mẫu số; bỏ sót một hướng khi xét giới hạn ở vô cực; bỏ điều kiện của biến hoặc đơn vị. Sau bài, về Điểm dừng 07 (trang 30).

- Với $u(x) = \frac{x^2-36}{x-6}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa, xét nhận định $x = 6$ là tiệm cận đứng.
- Một đồ thị có giới hạn 3 ở $+\infty$ và -5 ở $-\infty$. Viết các đường ngang, gắn với đúng dấu và phác vị trí của chúng trên hệ trục. Phần phác chỉ cần đường thẳng và nhãn, chưa cần dựng cả đồ thị.
- Tìm tiệm cận xiên của $v(x) = \frac{3x^2+x+5}{x+1}$ bằng cách tách phần dư.
- Trong mô hình giả định $B(t) = 4 + \frac{15}{t+3}$ (mg L⁻¹), $t \geq 0$ giờ, nêu mức tiến tới, việc đạt mức ấy và vai trò của mốc -3 .

Xem lời giải (trang 62).

Điểm dừng 07

Đối chiếu riêng từng ý: tập xác định và giới hạn tại điểm bị loại; tiệm cận ngang ứng với đúng hướng giới hạn; phần còn lại sau phép chia khi tìm tiệm cận xiên; điều kiện của biến và đơn vị trong mô hình. Nếu cần kiểm lại sau sửa, chọn đúng ý chưa gặp trước đó ở Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 42), rồi trở về Điểm dừng này.

Ghi ngày thực và phần làm được sau khoảng trễ. Việc nhớ được bốn ý này chưa thay một lần tự đọc hình mới hoặc kiểm giới hạn vô cực tại mốc hữu hạn. Nếu còn vướng các phần ấy, hẹn kiểm riêng bằng câu phù hợp; không nhận cả chủ đề chỉ vì đã làm đủ ba lượt.

Ôn nền

Chọn đúng thao tác đang vướng. Mỗi phần có một ví dụ để học và một câu tự làm khác ví dụ. Hãy nhớ câu đang gọi hỗ trợ; sau đối chiếu, trở về đúng câu ấy. Làm được câu nền chỉ xác nhận thao tác nền, không tự xác nhận toàn bộ mục tiêu của bài gốc.

Em đang vướng	Phần nên đọc
Không rõ $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$; nhầm dấu vô cực	Giới hạn một phía (trang 31)
Không biết xử lí $x \rightarrow \pm\infty$ hoặc bỏ sót một dấu	Giới hạn ở vô cực (trang 32)
Rút gọn làm mất điểm loại; chia đa thức sai	Biến đổi phân thức (trang 32)

Nếu cần ôn rộng hơn, có thể đọc tài nguyên chung **Tập xác định và điều kiện áp dụng**, **Xét dấu biểu thức có nhân tử** và **Cận và giá trị được đạt**. Câu đã gặp ở gói trước không trở thành câu xác nhận mới chỉ vì được dẫn lại ở đây.

Giới hạn một phía: nhìn hướng và dấu

Dùng khi: em biết mốc cần xét nhưng chưa hiểu phải tiến từ phía nào, hoặc chưa giải thích được dấu $+\infty/-\infty$.

$x \rightarrow a^-$ nghĩa là x nhận các giá trị nhỏ hơn a và tiến gần a ; $x \rightarrow a^+$ là nhận các giá trị lớn hơn a và tiến gần a . Chỉ xét phía có điểm thuộc tập xác định tiến sát mốc.

Nếu một tử số tiến tới số dương khác 0 còn mẫu tiến tới 0^+ thì thương tiến tới $+\infty$; nếu mẫu tiến tới 0^- thì thương tiến tới $-\infty$. Tử âm làm đổi dấu kết luận. Các câu này nói về sự tăng/giảm không bị chặn, không phải phép chia cho số 0.

Ví dụ. Với $v(x) = \frac{1}{x-5}$, khi $x \rightarrow 5^-$, $x - 5$ âm và tiến về 0 nên $v(x) \rightarrow -\infty$. Khi $x \rightarrow 5^+$, $x - 5$ dương và tiến về 0 nên $v(x) \rightarrow +\infty$. Một vài giá trị số giúp hình dung, nhưng dấu và giới hạn mới là căn cứ cho kết luận.

Nếu mẫu là $(x - a)^2$, nó dương ở cả hai phía của a . Vì thế không được lấy kết quả dấu trái/phải của $\frac{1}{x-a}$ áp nguyên sang mẫu bình phương.

Nhiệm vụ 31 — Giới hạn một phía

Tính hai giới hạn một phía của $u(x) = -\frac{2}{x+4}$ khi x tiến tới -4 . Trước mỗi kết luận, ghi dấu tử và dấu mẫu.

Đáp án và tiêu chí

Khi $x \rightarrow -4^-$, $x + 4$ âm và tiến tới 0, tử -2 âm; thương dương và tăng không bị chặn, nên giới hạn là $+\infty$. Khi $x \rightarrow -4^+$, mẫu dương và tiến tới 0, tử âm nên giới hạn là $-\infty$.

Đạt thao tác nền khi em ghi đúng cả hướng, dấu và kết luận. Nếu mục tiêu ở bài gốc là xác định đường tiệm cận, em còn phải dùng định nghĩa và viết phương trình đường thẳng cho bài đó.

Trở về nhiệm vụ đang gọi. Nếu mở thẻ trực tiếp, có thể quay lại mục tiệm cận đúng (trang 10) hoặc chọn Luyện tập (trang 19). Nếu đã xem đáp án trước khi tự làm, đừng dùng lại câu này làm bằng chứng mới.

Giới hạn ở vô cực: hai hướng cần được kiểm

Dùng khi: em đang thay “vô cực” vào biểu thức, không biết chia theo bậc, hoặc cho rằng kết quả tại $+\infty$ tự dùng được cho $-\infty$.

Khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$, ta có $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ và $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$. Tuy vậy, dấu của x khác nhau ở hai hướng, đặc biệt quan trọng khi có căn hoặc trị tuyệt đối.

Ví dụ phân thức. Với $p(x) = \frac{3x+4}{x-2}$, chia tử và mẫu cho x trong vùng $x \neq 0$:

$$p(x) = \frac{3 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}}.$$

Khi $x \rightarrow -\infty$ hoặc $x \rightarrow +\infty$, tử của phân thức sau biến đổi tiến tới 3, mẫu tiến tới 1 $\neq 0$, nên $p(x) \rightarrow 3$. Phép chia cả tử và mẫu cho x phục vụ việc tính các giới hạn này; giá trị 2 vẫn không thuộc tập xác định của hàm số ban đầu.

Nhiệm vụ 32 — Giới hạn phân thức ở vô cực

Tính giới hạn của $q(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$ khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$. Viết phép biến đổi làm rõ kết quả.

Đáp án và tiêu chí

Chia tử và mẫu cho x : $q(x) = \frac{5 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}}$. Ở cả hai đầu, tử tiến tới 5, mẫu tiến tới 2 khác 0; cả hai giới hạn bằng $\frac{5}{2}$. Đạt khi em nêu được phép biến đổi và kiểm cả hai hướng, không chỉ đoán từ một giá trị x lớn.

Nhánh căn — chỉ cần khi chọn Chuyển giao. Với x thực, $\sqrt{x^2} = |x|$. Nếu $x > 0$ thì $|x| = x$; nếu $x < 0$ thì $|x| = -x$. Chẳng hạn, $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ bằng 1 khi $x > 0$ và -1 khi $x < 0$. Đây là lý do một giới hạn chứa căn có thể cho hai kết quả khác nhau ở hai đầu.

Nhiệm vụ 33 — Giới hạn chứa căn ở hai đầu

Tính hai giới hạn ở vô cực của $r(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$. Hãy tách $\frac{|x|}{x}$ để giải thích dấu.

Đáp án và tiêu chí

Với $x \neq 0$,

$$r(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}.$$

Căn sau tiến tới 1. Ở $+\infty$, $\frac{|x|}{x} = 1$ nên $r(x) \rightarrow 1$; ở $-\infty$, $\frac{|x|}{x} = -1$ nên $r(x) \rightarrow -1$. Đạt phần nền căn khi giải thích được dấu bằng trị tuyệt đối. Làm đúng câu phân thức phía trên chưa thay thế tiêu chí này.

Trở về nhiệm vụ đang gọi; nếu vào trực tiếp, chọn mục tiệm cận ngang (trang 7) hoặc Chuyển giao (trang 23) khi đã đủ nền. Các câu đã xem đáp án chỉ dùng để học lại.

Biến đổi phân thức: giữ điều kiện, kiểm thương và dư

Dùng khi: em rút gọn rồi thêm điểm vào tập xác định, hoặc phép chia dẫn đến sai đường xiên. Khi rút gọn một phân thức, phải giữ điều kiện mẫu số ban đầu khác 0. Biểu thức rút gọn có thể có nghĩa ở một số giá trị mà phân thức ban đầu không xác định, nhưng điều đó không bổ sung các giá trị ấy vào tập xác định của hàm số đã cho.

Chia đa thức có thể viết dưới dạng

$$\text{tử} = \text{mẫu} \times \text{thương} + \text{dư}.$$

Chia cả hai vế cho đa thức mẫu tại những giá trị làm mẫu khác 0, ta được thương cộng với phần dư chia cho mẫu. Để kiểm tra phép chia, lấy đa thức mẫu nhân với thương rồi cộng phần dư; kết quả phải bằng đa thức tử ban đầu. Phép kiểm này chỉ xác nhận phép chia. Muốn kết luận về tiệm cận xiên, còn phải tính giới hạn của phần còn lại sau phép chia.

Ví dụ. Vì $(x+1)(x+1) + 4 = x^2 + 2x + 5$, nên

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} = x + 1 + \frac{4}{x + 1} \quad (x \neq -1).$$

Nếu đang tìm tiệm cận xiên, còn phải kiểm phần $\frac{4}{x+1}$ tiến về 0 ở hướng vô cực đang xét. Không bỏ qua bước này chỉ vì đã thấy một biểu thức bậc nhất.

Nhiệm vụ 34 — Điều kiện, thương và phần dư

Viết $\frac{x^2-2x+5}{x-1}$ thành một biểu thức bậc nhất cộng phần dư trên mẫu. Ghi điều kiện, rồi kiểm phép chia bằng cách lấy mẫu nhân với thương và cộng phần dư.

Đáp án và tiêu chí

Với $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = x - 1 + \frac{4}{x - 1},$$

vì $(x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$. Đạt thao tác nền khi thương, dư, điều kiện và phép kiểm đều đúng. Nếu bài gốc yêu cầu tiệm cận, quay về bài đó và tính đúng giới hạn phần còn lại.

Nếu mở trực tiếp, trở lại mục 1 (trang 5) khi vướng tập xác định hoặc mục 4 (trang 12) khi vướng phép chia. Nếu câu nền đã gặp trước đó, không ghi lần làm lại là xác nhận độc lập mới.

Sửa lỗi

Giữ bài ban đầu và chỉ ra bước chưa đúng trước khi chọn câu. Đọc lại định nghĩa hoặc ví dụ để hiểu cách sửa, rồi tự làm bài kiểm tra lại tương ứng trước khi mở đáp án. Bài đã gặp trước đó có thể dùng để ôn cách làm, nhưng không được tính là một bài mới để tự kiểm tra. Nếu một nhiệm vụ có nhiều ý, kết quả của mỗi ý chỉ cho biết phần kiến thức mà ý đó kiểm tra. Sau khi đối chiếu, ghi phần tự làm được và phần còn vướng khi cần lưu kết quả; quay lại bài hoặc Điểm dừng đã đưa em đến đây. Nếu không còn bài phù hợp chưa gặp trước đó, xem hướng dẫn khi hết bài mới (trang 44).

Chọn bài theo dấu hiệu

Mỗi dòng dưới đây chỉ ra một điều cần phân biệt để hiểu bài vững hơn. Đối chiếu với bài làm của em, thử trả lời câu hỏi rồi xem lại phần học được dẫn khi cần. Chọn đúng bài và đúng ý theo nơi phát hiện; nếu đang học Bài học, có thể dùng nhóm Sau Luyện tập. Chỉ tự kiểm tra bằng bài phù hợp chưa gặp trước đó; trong lượt Kiểm tra phải kết thúc lượt trước khi dùng hỗ trợ.

Nút thất nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Điểm bị loại và tiệm cận đứng	Thấy mẫu bằng 0 rồi kết luận có tiệm cận đứng; sau rút gọn lại thêm điểm đã loại.	Giới hạn tại điểm bị loại là hữu hạn hay vô cực? Giữ tập xác định ban đầu và xét giới hạn theo phía được phép; điểm bị loại chưa đủ để kết luận tiệm cận. Xem lại kiến thức (trang 5).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận (trang 37). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực (ý a) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu (ý a) (trang 42).
Dấu và hướng của giới hạn một phía	Gán hai phía trái dấu một cách máy móc hoặc nhầm dấu vô cực.	Tử và mẫu mang dấu gì ở mỗi phía? Xét dấu biểu thức ở từng phía, kể cả khi mẫu có lũy thừa chẵn. Xem lại kiến thức (trang 31).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 36 – Dấu ở hai phía (trang 38). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực (ý b) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu (ý b) (trang 42).
Hai đầu vô cực và số đường tiệm cận ngang	Chỉ xét một đầu, hoặc đếm hai giới hạn bằng nhau thành hai đường khác nhau.	Mỗi đầu được phép xét cho đường ngang nào? Ghi riêng hướng và giới hạn; hai kết quả trùng nhau chỉ xác định một đường ngang. Xem lại kiến thức (trang 7).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm (ý a) (trang 38). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm (ý a) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu (ý c) (trang 42).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Phần thương, phần dư và giới hạn của hiệu	Bỏ hằng số của thương, chia sai hoặc chỉ tìm hệ số góc.	Hiệu giữa hàm số và cả đường thẳng dự kiến có tiến về 0 không? Kiểm phép chia bằng phép nhân, giữ phần dư và kiểm giới hạn của hiệu khi $x \rightarrow -\infty$ hoặc $x \rightarrow +\infty$ theo phía đang xét. Xem lại kiến thức (trang 12).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình (ý a) (trang 38). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình (ý a) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý a) (trang 42).
Giao điểm hữu hạn và hành vi ở vô cực	Bác tiệm cận ngang vì đồ thị cắt đường đó.	Giao điểm ở một vị trí hữu hạn có phủ định giới hạn ở xa không? Kiểm riêng giới hạn và phương trình giao điểm; hai câu hỏi có thể cùng có câu trả lời đúng. Xem lại kiến thức (trang 9).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm (ý b) (trang 38). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm (ý b) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý b) (trang 42).
Mức tiến tới và mức đạt được	Đọc mức giới hạn thành giá trị mà mô hình đạt tại một thời điểm.	Có giá trị biến nào thỏa điều kiện làm hàm số bằng mức đó không? Giải câu hỏi về sự đạt được trong tập được phép; giới hạn không thay cho giá trị tại một điểm. Xem lại kiến thức (trang 15).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình (ý b) (trang 38). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình (ý b) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý c) (trang 42).
Công thức mở rộng và phạm vi mô hình	Dùng thời gian, sản lượng hoặc hướng tiến không được mô hình cho phép.	Những giá trị của biến đang dùng có nằm trong điều kiện đề bài không? Giữ tập đang xét và đơn vị; không gán tiệm cận cho phía mà đồ thị của mô hình không thể tiến tới. Xem lại kiến thức (trang 15).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình (ý b) (trang 38). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình (ý b) (trang 40). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải (ý c) (trang 42).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Một phía vô cực và hai phía khác nhau	Dùng phía có giới hạn hữu hạn để bác tiệm cận đứng do phía còn lại tạo ra.	Có ít nhất một phía được phép xét cho giới hạn vô cực không? Đọc riêng từng nhánh; không yêu cầu hai phía đều vô cực hoặc phải trái dấu. Xem lại kiến thức (trang 10).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh (trang 39). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia (trang 41). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 43).
Giá trị gán tại mốc và hành vi lân cận	Dùng điểm kín được gán tại mốc để bác tiệm cận đứng.	Thay riêng giá trị tại mốc có làm đổi hành vi ở gần mốc không? Phân biệt giá trị tại điểm và giới hạn một phía. Xem lại kiến thức (trang 5).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 35, ý b (trang 37). Sau Kiểm tra: có thể dùng cùng ý b nếu thực sự chưa gặp trước đó; nếu đã gặp, chưa có bài mới tương ứng. Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46, ý b (trang 43).
Đường thẳng tiệm cận và số giới hạn	Chỉ ghi một số hoặc đọc sai hướng của đường xiên trên hình.	Đã viết phương trình đường thẳng và chỉ đúng nhánh, đúng hướng chưa? Phân biệt đường đứng, ngang, xiên; kết luận bằng dữ kiện giới hạn, dùng hình để đối chiếu. Xem lại kiến thức (trang 12).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh (trang 39). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia (trang 41). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 43).
Hình minh họa và căn cứ kết luận	Chỉ nhìn nét vẽ để đoán tiệm cận hoặc bỏ cả phần đúng khi chưa lập luận.	Dữ kiện giới hạn nào chứng minh từng kết luận? Giữ những bước có căn cứ; sửa đúng bước thiếu điều kiện hoặc đọc quá dữ kiện. Xem lại kiến thức (trang 16).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh (trang 39). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia (trang 41). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 43).

Riêng lỗi dùng một giá trị được gán tại mốc để bác tiệm cận đứng, trong Bài học hoặc Luyện tập hãy tự làm ý b chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận (trang 37). Nếu lỗi được phát hiện sau Kiểm tra, vẫn có thể dùng ý ấy khi thực sự chưa gặp trước đó vì nó thuộc nhóm trước; nếu đã gặp trước đó thì ghi chưa xác nhận. Sau Ôn lại, dùng ý b chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau (trang 43). Không lấy việc làm đúng câu về điểm bị loại thay cho tình huống giá trị đã được gán riêng.

Các câu đọc hình của ba nhóm là ba nhiệm vụ riêng. Dùng đúng nhóm theo nơi phát hiện; không dùng sớm bài Kiểm tra, Ôn lại hoặc Sửa lỗi của giai đoạn sau để lấp chỗ thiếu. Một câu đã gặp không trở thành câu mới sau nhiều ngày. Nếu câu của nhóm phù hợp đã gặp trước đó hoặc còn sai, dùng hướng dẫn khi hết câu mới (trang 44).

Đọc lỗi để biết cần xem lại gì

- **Điểm loại chưa phải tiệm cận.** Xem Ví dụ 01 (trang 5); rút gọn không thêm điểm vào tập xác định. Sau đó tự làm câu về điểm bị loại trong bảng.
- **Dấu vô cực đến từ dấu biểu thức.** Xem nền một phía (trang 31), kiểm tử và mẫu trước khi kết luận. Mẫu bình phương có thể làm hai phía cùng dấu.
- **Hai đầu là hai câu hỏi.** Xem mục 2 (trang 7); ghi tách $+\infty$ và $-\infty$. Chỉ xét hướng tập xác định cho phép; trùng kết quả thì chỉ có một đường ngang.
- **Thương chưa đủ nếu chia sai hoặc bỏ hằng số.** Kiểm tra phép chia bằng phép nhân ở nền biến đổi (trang 32), rồi kiểm tra giới hạn của hiệu với cả $ax + b$ theo mục 4 (trang 12).
- **Giao điểm hữu hạn không bác giới hạn ở xa.** Xem lại định nghĩa ngang; phải kiểm giới hạn và giải phương trình giao điểm, không chỉ nhìn hình.
- **Giữ điều kiện của mô hình.** Xem Ví dụ 07 (trang 15). Chỉ xét giới hạn mà các giá trị của biến thỏa điều kiện đề bài cho phép. Muốn kết luận một mức được đạt, kiểm tra xem có giá trị nào của biến thỏa điều kiện để hàm số bằng mức ấy hay không.

Sau mỗi lỗi, tự hỏi: “Tập xác định có cho phép hướng này không?”, “Giới hạn nào quyết định kết luận?”, “Mình đang giữ phần đúng nào?”, “Câu mới vừa làm thực sự xác nhận điều gì?”. Những câu hỏi ấy giúp dùng đúng giải thích phía trên.

Nếu lỗi được phát hiện ngay trong Bài học, em cũng có thể dùng câu sửa phù hợp chưa gặp trước đó ở nhóm Sau Luyện tập và trở về câu Bài học đang vướng; không cần chờ làm Kiểm tra mới được sửa.

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận

Dùng khi: rút gọn làm mất điểm bị loại (ý a), hoặc dùng giá trị tại mốc để bác tiệm cận đứng (ý b).

- Với $u(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$, ghi tập xác định, tính giới hạn tại 7 và kiểm $x = 7$ có là tiệm cận đứng không. Có thể gán $u(7) = 14$ sau rút gọn không?
- Hàm v xác định trên $\mathbb{R}$, có $v(-1) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) = -\infty$. Một bạn nói: “Điểm $(-1; 4)$ thuộc đồ thị, nên $x = -1$ không thể là tiệm cận đứng.” Hãy giữ phần đúng, chỉ bước sai và viết lại kết luận có căn cứ. Dữ kiện có quyết định giới hạn phải tại -1 không?

Tiêu chí xác nhận: ý a giữ tập xác định và phân biệt giới hạn hữu hạn với giá trị tại điểm bị loại; ý b giữ điểm trên đồ thị, dùng giới hạn trái vô cực và không suy thêm về phía phải. Mỗi ý chỉ xác nhận tình huống mà ý ấy kiểm.

Sau đối chiếu: nếu ý a còn sai, xem Giới hạn và giá trị (trang 5) hoặc Biến đổi phân thức (trang 32) tùy nguyên nhân; nếu ý b còn sai, xem Tiệm cận đứng (trang 10) hoặc Giới hạn một phía (trang 31). Sau đó, dùng hướng dẫn chung của phần Sửa lỗi (trang 34) để ghi kết quả và quay về bài đang làm. Có thể quay lại Điểm dừng 02 (trang 20), Điểm dừng 03 (trang 22) hoặc câu Bài học đang làm trước khi mở hỗ trợ.

Xem lời giải (trang 63).

Nhiệm vụ 36 – Dấu ở hai phía

Dùng khi: nhầm dấu hoặc phía.

Tính hai giới hạn một phía của $v(x) = -\frac{4}{x-6}$ tại 6. Nêu tiệm cận đứng và giải thích dấu.

Tiêu chí xác nhận: giải thích dấu tử/mẫu ở từng phía và dùng đúng định nghĩa đường đứng.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, xem lại phần liên quan (trang 31). **Quay lại:** Điểm dừng 02 (trang 20), Điểm dừng 03 (trang 22) hoặc câu Bài học đã gọi.

Xem lời giải (trang 63).

Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm

Dùng khi: bỏ một đầu hoặc cho rằng đồ thị không thể cắt tiệm cận.

- Biết giới hạn của f bằng -6 ở $+\infty$ và 4 ở $-\infty$. Ghi hai tiệm cận ngang theo hướng.
- Với $g(x) = 2 + \frac{x+1}{x^2+2}$, chứng minh một tiệm cận ngang và tìm giao điểm của đồ thị với nó.

Tiêu chí xác nhận: ý a ghi đường theo từng đầu; ý b có giới hạn, giao điểm và lí do không mâu thuẫn.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, xem lại phần liên quan (trang 7). **Quay lại:** Điểm dừng 02 (trang 20), Điểm dừng 03 (trang 22) hoặc câu Bài học đã gọi.

Xem lời giải (trang 64).

Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình

Dùng khi: thiếu hệ số tự do hoặc bỏ điều kiện của mô hình.

- Tìm tiệm cận xiên của $f(x) = \frac{x^2+4x+9}{x+1}$, kiểm bằng giới hạn hiệu.
- Với mô hình giả định $a(t) = 8 + \frac{10}{t+5}$, trong đó $t \geq 0$ tính bằng giờ và $a(t)$ tính bằng độ C, hãy tính giới hạn khi $t \rightarrow +\infty$ và giải thích ý nghĩa. Có thời điểm nào trong mô hình để $a(t) = 8$ không? Đường $t = -5$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị trong mô hình này không? Vì sao?

Tiêu chí xác nhận: ý a kiểm phép chia và giới hạn hiệu; ý b giữ điều kiện của biến, đơn vị và xét sự đạt được.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem Biến đổi phân thức (trang 32) để kiểm phép chia và Tiệm cận xiên (trang 12) để kiểm tra giới hạn của hiệu; nếu sai ý b, xem Tập đang xét và bối cảnh (trang 15).

Quay lại: Điểm dừng 02 (trang 20), Điểm dừng 03 (trang 22) hoặc câu Bài học đã gọi.

Xem lời giải (trang 64).

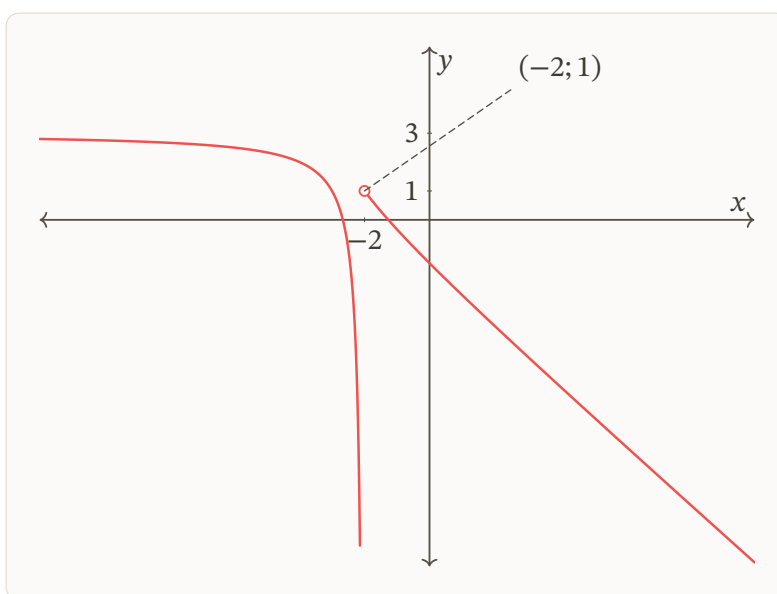
Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh

Dùng khi: đọc nhầm nhánh, hướng đường xiên hoặc dùng điểm hở để bác đường đứng.

Hàm f xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Hình đi kèm dữ kiện chính xác:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0.$$



Hình 15

- Viết các tiệm cận suy ra từ dữ kiện; chỉ đúng nhánh và hướng trên hình. Ở đầu phải, nhánh tiến gần đường xiên đi lên hay đi xuống? Nêu giới hạn hiệu làm căn cứ.
- Một bạn dùng điểm hở $(-2; 1)$ để bác tiệm cận đứng tại mốc. Chỉ ra bước sai; giới hạn phải hữu hạn có quyết định giới hạn trái không?

Tiêu chí xác nhận: chỉ đúng đường ngang ở đầu trái, đường đứng từ phía trái và đường xiên đi xuống ở đầu phải; giữ giới hạn từng phía, kiểm giới hạn hiệu và không gán giá trị ở điểm hở. Nếu chỉ đọc đúng ngang/đứng, chưa xác nhận phần đọc hình xiên.

Xem lại khi cần: Nếu nhầm nhánh hoặc phía tạo đường đứng, xem Tiệm cận đứng (trang 10) và Giới hạn một phía (trang 31); nếu nhầm đường xiên, xem Tiệm cận xiên (trang 12). **Quay lại:** Điểm dừng 02 (trang 20), Điểm dừng 03 (trang 22) hoặc câu Bài học đã gọi.

Xem lời giải (trang 65).

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực

Dùng khi: lần điểm bị loại, giới hạn hữu hạn và vô cực.

- Xét riêng mốc 8 cho $p(x) = \frac{x^2-64}{x-8}$ với tập xác định gồm tất cả các giá trị làm công thức có nghĩa; kết luận về giá trị tại điểm và đường đứng.
- Tính hai giới hạn của $q(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ tại -2 , rồi kết luận đường đứng.

Tiêu chí xác nhận: xử lý riêng từng hàm; ý a giữ tập xác định, ý b giải thích dấu mẫu bình phương.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem Giới hạn và giá trị (trang 5); nếu sai ý b, xem Giới hạn một phía (trang 31) và Tiệm cận đứng (trang 10). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (trang 26).

Xem lời giải (trang 65).

Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm

Dùng khi: bỏ một đầu hoặc nhầm giao điểm với giới hạn ở xa.

- Biết giới hạn của f bằng 6 ở $+\infty$ và -7 ở $-\infty$. Ghi các đường ngang.
- Với $g(x) = -3 + \frac{x-4}{x^2+5}$, kiểm $y = -3$ là tiệm cận ngang và tìm giao điểm của đồ thị với nó; giải thích vì sao hai kết quả cùng đúng.

Tiêu chí xác nhận: xét đủ hai đầu ở ý a; có giới hạn và giao điểm hợp lệ ở ý b.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, xem lại phần liên quan (trang 7). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (trang 26).

Xem lời giải (trang 66).

Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình

Dùng khi: chọn sai phần tuyến tính hoặc ngoại suy vượt tập đang xét.

- Tìm tiệm cận xiên của $f(x) = \frac{2x^2-3x+6}{x-1}$; kiểm bằng giới hạn của hiệu.
- Một mô hình giả định $b(t) = 7 + \frac{14}{t+6}$, với b tính bằng mg L^{-1} , chỉ được cho trong 30 phút đầu: $0 \leq t \leq 30$. Một bạn kết luận “đồ thị mô hình có tiệm cận ngang $b = 7$ khi $t \rightarrow +\infty$ ”. Kết luận ấy có theo được từ điều kiện chỉ xét $0 \leq t \leq 30$ không? Nếu bổ sung giả thiết dùng cùng công thức cho mọi $t \geq 0$, hãy nêu mức tiến tới và kiểm việc đạt mức ấy trong mô hình mở rộng.

Tiêu chí xác nhận: ý a kiểm tra giới hạn của hiệu; ý b phân biệt đoạn đang xét với giả thiết mở rộng được bổ sung.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem Biến đổi phân thức (trang 32) và Tiệm cận xiên (trang 12); nếu sai ý b, xem Tập đang xét và bối cảnh (trang 15). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (trang 26).

Xem lời giải (trang 66).

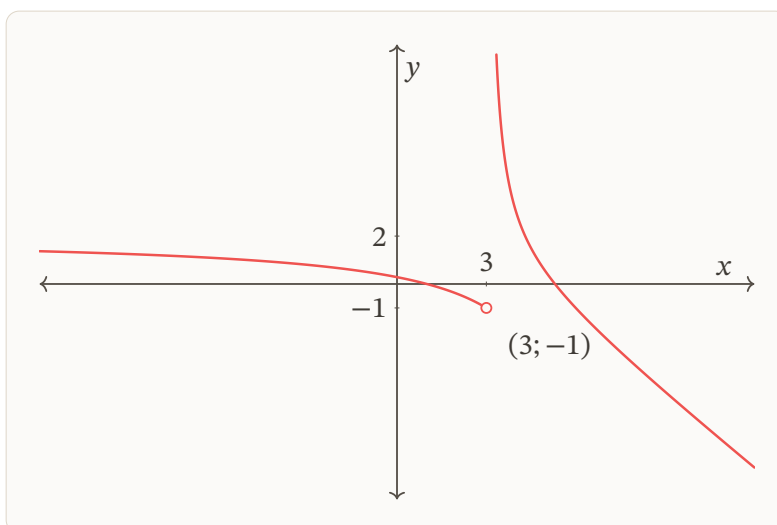
Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia

Dùng khi: nhằm nhánh, hướng đường xiên hoặc vai trò điểm hở.

Hình sau thuộc một hàm xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Các dữ kiện chính xác đi kèm là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = 0.$$



Hình 16

- Viết các tiệm cận suy ra từ dữ kiện. Trên hình, chỉ nhánh và hướng tương ứng với từng đường; với đầu phải, chỉ rõ nhánh đang tiến gần một đường xiên đi lên hay đi xuống.
- Giải thích điểm hở trên nhánh trái nói gì về giới hạn trái và giá trị tại mốc. Thông tin ấy có bác được tiệm cận đứng từ phía phải không?
- Kiểm nhận định “Có điểm hở nên không thể có tiệm cận đứng ở cùng hoành độ”.

Tiêu chí xác nhận: nối đúng mỗi giới hạn với phần hình tương ứng, giải thích vì sao một phía đủ.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, xem lại phần liên quan (trang 15). **Quay lại:** Điểm dừng 04 (trang 26).

Xem lời giải (trang 67).

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu

Dùng khi: tái diễn lỗi tập xác định, dấu hoặc bỏ đầu vô cực.

- Xét mốc 9 của $u(x) = \frac{x^2-81}{x-9}$: tập xác định, giới hạn, giá trị tại điểm và đường đứng.
- Tính hai giới hạn của $v(x) = \frac{5}{x+4}$ tại -4 , kết luận đường đứng.
- Một hàm có giới hạn 8 ở $+\infty$ và -9 ở $-\infty$. Ghi đường ngang theo hướng.

Tiêu chí xác nhận: đối chiếu từng ý; không lấy đúng một ý làm xác nhận các ý còn lại.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem Giới hạn và giá trị (trang 5); nếu sai ý b, xem Giới hạn một phía (trang 31) và Tiệm cận đứng (trang 10); nếu sai ý c, xem Giới hạn ở vô cực (trang 32) và Tiệm cận ngang (trang 7). **Quay lại:** Điểm dừng 05 (trang 28), Điểm dừng 06 (trang 29) hoặc Điểm dừng 07 (trang 30) đã gọi.

Xem lời giải (trang 67).

Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải

Dùng khi: quên kiểm phần dư, giao điểm hoặc dấu phần dư trong mô hình.

- Tìm tiệm cận xiên của $f(x) = \frac{3x^2-2x+7}{x-1}$, kiểm bằng giới hạn của hiệu.
- Với $g(x) = 4 + \frac{x+2}{x^2+7}$, tìm tiệm cận ngang và giao điểm của đồ thị với đường ấy.
- Trong mô hình giả định $c(t) = 3 - \frac{16}{t+7}$, với c tính bằng mg L^{-1} và $t \geq 0$ tính bằng giờ, nêu mức tiến tới và việc đạt mức ấy. Có thể từ giới hạn bằng 3 mà kết luận $c(t) > 3$ không? Kiểm vai trò của mốc -7 .

Tiêu chí xác nhận: phân biệt ba mục tiêu; diễn giải đúng việc tiến gần từ phía nào và việc đạt mức.

Xem lại khi cần: Nếu sai ý a, xem Biến đổi phân thức (trang 32) và Tiệm cận xiên (trang 12); nếu sai ý b, xem Tiệm cận ngang (trang 7), đặc biệt Ví dụ 04; nếu sai ý c, xem Tập đang xét và bối cảnh (trang 15). **Quay lại:** Điểm dừng 05 (trang 28), Điểm dừng 06 (trang 29) hoặc Điểm dừng 07 (trang 30) đã gọi.

Xem lời giải (trang 68).

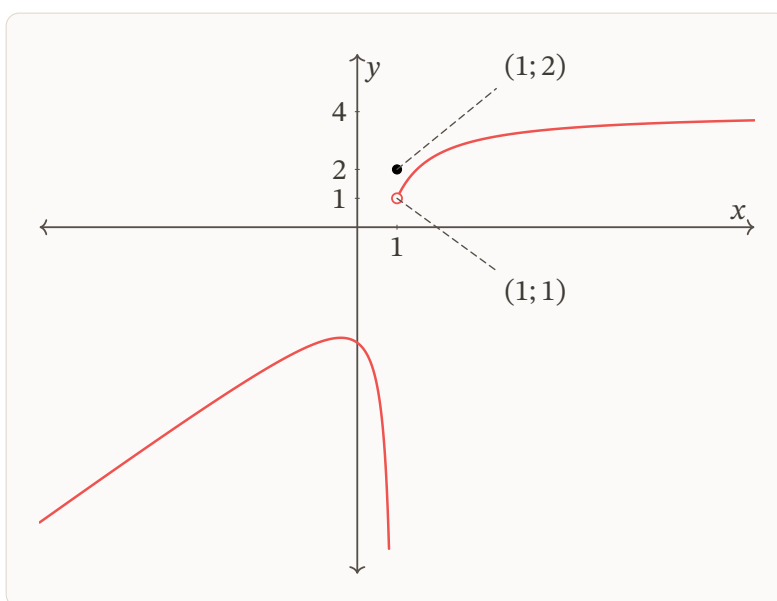
Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau

Dùng khi: nhằm điểm kín với giới hạn hoặc áp một đầu cho cả hai đầu.

Hàm g xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, có $g(1) = 2$. Dữ kiện chính xác kèm hình là

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x - 2)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4.$$



Hình 17

- Nêu các tiệm cận, chỉ nhánh và hướng tương ứng. Không áp kết quả của đầu trái cho đầu phải.
- Phân biệt điểm kín $(1; 2)$, điểm hở $(1; 1)$ và giới hạn trái. Việc $g(1)$ được xác định có bác được tiệm cận đứng không?
- Chỉ từ dữ kiện tiệm cận, có xác định duy nhất toàn bộ đồ thị không? Nêu giới hạn của kết luận.

Tiêu chí xác nhận: đọc đúng cả hai nhánh, tách giá trị tại mốc khỏi giới hạn và không suy duy nhất đồ thị.

Xem lại khi cần: Nếu còn sai, xem lại phần liên quan (trang 10). **Quay lại:** Điểm dừng 05 (trang 28), Điểm dừng 06 (trang 29) hoặc Điểm dừng 07 (trang 30) đã gọi.

Xem lời giải (trang 68).

Sau câu xác nhận và khi hết bài mới

Nếu tự làm đúng và giải thích được, ghi “đã xác nhận mục tiêu này trong lượt”, rồi trở về nhiệm vụ hoặc điểm dừng đã gọi hỗ trợ. Kết quả ấy không đổi điểm Kiểm tra ban đầu và chưa chứng nhận khả năng sau nhiều ngày.

Nếu đã xem đáp án, câu trở thành tài nguyên học. Chỉ chọn câu/ý khác cùng mục tiêu chưa gặp trước đó trong nhóm của giai đoạn đang học hoặc nhóm trước nếu phù hợp; giữ đúng nơi quay về. Không lấy câu của giai đoạn sau để dùng sớm, không coi đổi số bài là làm bài mới. Một câu chỉ tính tiệm cận không thay cho việc chỉ và giải thích đúng các nhánh trên hình.

Nếu các câu phù hợp đều đã gặp trước đó hoặc em vẫn chưa làm được, ghi rõ **chưa có đủ bằng chứng mới để xác nhận mục tiêu này**. Trở lại đoạn học hoặc nền đúng nguyên nhân; lưu yêu cầu bổ sung câu phù hợp khi trao đổi về bài học. Em có thể tiếp tục mục tiêu độc lập đã đủ nền. Không tự đánh dấu hoàn tất, không phải tự tìm một câu chưa được kiểm rồi coi là đã đạt.

Nếu vào thẳng một thẻ hỗ trợ mà chưa có bài đang làm, hãy chọn Bài học (trang 4), Luyện tập (trang 19) hoặc lượt Ôn lại (trang 28) phù hợp. Các liên kết Điểm dừng 02 (trang 20), Điểm dừng 03 (trang 22) và Sau Kiểm tra (trang 26) giúp em về đúng điểm đã chọn; không có một điểm quay về cố định cho tất cả người học.

Nhật kí

Ghi khi cần lưu một quyết định hoặc kết thúc buổi học. Em không phải ghi sau mọi thao tác và không phải điền đủ mọi trường khi chưa có dữ liệu. Dùng mẫu Nhật kí chung của chương trình (trang 45); mẫu giữ 14 trường, gồm bài làm ban đầu, mức hỗ trợ, phần sau sửa, lịch ôn và nơi tiếp tục.

Mẫu trống dưới đây trích từ nguồn chung để em dùng ngay:

Trường	Em ghi
Ngày–giờ	...
Gói / mục tiêu	...
Nguồn phát hiện	...
Bài làm ban đầu	...
Mức hỗ trợ ban đầu	...
Bảng chứng quan sát	...
Phân loại	...
Mã lỗi hoặc mã Nền	...
Hành động	...
Bài khắc phục mới	...
Trạng thái sau sửa	...
Hẹn Ôn lại	...
Kết quả sau khoảng trễ	...
Quyết định tiếp theo	...

Ví dụ giả lập — không phải kết quả thật của một học sinh. Ví dụ minh họa cách ghi cho lỗi ở bài đã có lời giải trong Bài học; không cung cấp đáp án của một câu Sửa lỗi chưa dùng.

Trường	Ví dụ ghi
Ngày–giờ	Ngày 16 tháng 10 năm 2026, lúc 19 giờ 40 phút
Gói / mục tiêu	Đường tiệm cận / phân biệt giá trị tại mốc với giới hạn một phía
Nguồn phát hiện	Nhiệm vụ 10 trong Bài học
Bài làm ban đầu	Viết rằng có giá trị $g(2) = 5$ nên không thể có tiệm cận đứng tại 2
Mức hỗ trợ ban đầu	Tự làm, chưa mở lời giải
Bảng chứng quan sát	Đã ghi đúng điểm $(2; 5)$ nhưng bỏ dữ kiện giới hạn phải vô cực
Phân loại	Lỗi về điều kiện tiệm cận đứng
Mã lỗi hoặc mã Nền	Nhầm giá trị tại điểm với hành vi ở lân cận
Hành động	Đọc lại định nghĩa; giữ điểm trên đồ thị, sửa lí do về đường đứng
Bài khắc phục mới	Chưa thực hiện câu mới phù hợp chưa gặp trước đó
Trạng thái sau sửa	Đã hiểu lời chữa; chưa có kết quả tự làm một bài mới để xác nhận
Hẹn Ôn lại	Chưa hẹn toàn gói vì chưa hoàn tất lượt chính; ghi việc cần kiểm riêng ở buổi tiếp
Kết quả sau khoảng trễ	Chưa kiểm

Trường	Ví dụ ghi
Quyết định tiếp theo	Tự làm ý b chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 35 trong Sửa lỗi sau Luyện tập, rồi trở về Nhiệm vụ 10; giữ mục tiêu chưa xác nhận cho đến khi có kết quả thực

Ví dụ không điền “đã đạt” chỉ vì đã đọc lời chữa. Khi có câu mới tự làm thật, thay các ô tương ứng bằng tên câu, mức hỗ trợ và kết quả quan sát; giữ lịch Ôn lại toàn gói riêng với lịch kiểm một lỗi.

Với gói này, hãy ghi rõ câu/ý đang vướng và mức đã xác nhận. Chẳng hạn, sau khi sửa phần tập xác định, có thể ghi “đã phân biệt điểm loại với giới hạn hữu hạn trong câu mới; phần đọc hình chưa kiểm”. Đó là cách mô tả phạm vi kết quả, không phải kết quả được điền sẵn cho em.

Giữ riêng ngày hẹn và kết quả thực của lượt ôn. Nếu chưa tự làm sau khoảng trễ, trường kết quả sau khoảng trễ vẫn là “chưa kiểm”.

Lời giải

Tự làm rồi mới mở lời giải của đúng câu. Đối chiếu điều kiện, cách làm và kết luận; phần tiêu chí giúp em nhận ra bước còn thiếu. Nếu đang làm Kiểm tra, hãy kết thúc lượt và giữ bài ban đầu trước khi mở trợ giúp.

Các ví dụ làm mẫu và đáp án nên ở ngay nơi giải thích; không chép lại ở đây.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 – Giữ tập xác định khi rút gọn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Mẫu phải khác 0, nên $D = \mathbb{R} \setminus \{10\}$. Với $x \neq 10$,

$$r(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x-10} = x+10.$$

Hai biểu thức bằng nhau trên D . Phép rút gọn không mở rộng tập xác định, nên không được thêm 10 hoặc gán giá trị $r(10)$.

Tiêu chí đối chiếu: giữ điều kiện bên cạnh công thức rút gọn. Nếu còn nhầm, xem Biến đổi phân thức (trang 32), rồi Xem đề bài (trang 4).

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ 02 – Đọc hướng và xét dấu

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Khi $x \rightarrow 1^-$, các giá trị $x < 1$ tiến gần 1; mẫu $x-1$ âm và tiến về 0. Tử -3 âm, nên thương dương và tăng không bị chặn:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} p(x) = +\infty.$$

Khi $x \rightarrow 1^+$, các giá trị $x > 1$ tiến gần 1; mẫu dương và tiến về 0. Tử vẫn âm, nên

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} p(x) = -\infty.$$

Tiêu chí đối chiếu: đọc đúng hướng và giải thích dấu ở từng phía. Nếu vướng, dùng Giới hạn một phía (trang 31), rồi Xem đề bài (trang 4).

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ 03 – Xét riêng hai đầu vô cực**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Khi xét ở xa, $x \neq 0$ và

$$q(x) = \frac{4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

Ở mỗi hướng $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$, tử tiến về 4, mẫu tiến về 1 khác 0. Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 4.$$

Phép chia cả tử và mẫu cho x phục vụ việc tính giới hạn ở vô cực; giá trị -2 vẫn không thuộc tập xác định ban đầu của q .

Tiêu chí đối chiếu: có biến đổi hợp lệ và kiểm riêng hai hướng. Nếu vướng, dùng Giới hạn ở vô cực (trang 32), rồi Xem đề bài (trang 4).

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ 04 – Kiểm thương và phần dư**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Điều kiện là $x \neq -1$. Ta có

$$(x + 1)(2x - 1) + 6 = 2x^2 + x + 5,$$

nên

$$A(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x + 1} \quad (x \neq -1).$$

Lấy mẫu nhân với thương rồi cộng phần dư; nếu được đúng tử ban đầu thì phép chia đã được kiểm tra. Việc dùng kết quả này để tìm tiệm cận còn cần bước giới hạn, sẽ được học ở phần chính.

Tiêu chí đối chiếu: đúng thương, dư, điều kiện và phép nhân kiểm lại. Nếu thiếu thao tác, dùng Biến đổi phân thức (trang 32), rồi Xem đề bài (trang 4).

Xem đề bài (trang 4).

Nhiệm vụ trong Bài học

Nhiệm vụ 05 – Rút gọn có thêm được một điểm không?

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định tự nhiên là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Với $x \in D$, ta có

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Vì vậy $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$. Phép rút gọn chỉ đúng trên D ; nó không thêm 1 vào tập xác định nên $r(1)$ vẫn không xác định. Nhận xét của bạn đúng ở phép biến đổi khi $x \neq 1$, sai ở việc gán giá trị tại điểm bị loại.

Tiêu chí đối chiếu: ghi điều kiện rút gọn; phân biệt giới hạn với giá trị của hàm.

Xem đề bài (trang 7).

Nhiệm vụ 06 – Ghi cả đường và hướng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Theo định nghĩa, giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ cho tiệm cận ngang $y = -1$, còn giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$ cho tiệm cận ngang $y = 3$.

Chỉ ghi $y = -1$ là bỏ sót đầu trái. Hai kết quả khác nhau nên có hai đường tiệm cận ngang; phương trình của chúng có dạng $y = L$, không phải $x = L$.

Tiêu chí đối chiếu: viết đủ hai đường và gắn đúng hướng tiến ra vô cực.

Xem đề bài (trang 10).

Nhiệm vụ 07 – Chỉ một phía có nghĩa

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Có thể kết luận $x = 5$ là tiệm cận đứng vì

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} w(x) = -\infty.$$

Chỉ một giới hạn một phía vô cực đã đủ. Tập xác định $(-\infty; 5)$ không có điểm nào lớn hơn 5 nên không yêu cầu thêm giới hạn phải. Kết quả không có nghĩa $w(5) = -\infty$: hàm không được xác định tại 5.

Tiêu chí đối chiếu: viện dẫn đúng điều kiện một phía và giữ đúng tập xác định.

Xem đề bài (trang 11).

Nhiệm vụ 08 – Thiếu một hằng số

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Với $x \neq -6$, ta có

$$q(x) - (2x - 5) = \frac{1}{x + 6}.$$

Ở cả hai hướng $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$, phân phân thức tiến về 0. Vì thế đường tiệm cận xiên là $y = 2x - 5$.

Trong khi đó,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [q(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [q(x) - 2x] = -5 \neq 0.$$

Do đó $y = 2x$ không phải tiệm cận xiên. Chỉ hệ số góc chưa xác định đủ đường thẳng.

Tiêu chí đối chiếu: tìm đủ hệ số tự do và bậc đường sai bằng giới hạn của hiệu.

Xem đề bài (trang 14).

Nhiệm vụ 09 – Không mở rộng tập xác định theo ý mình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Khi $t \geq 0$, mẫu $t + 2$ dương. Ta có

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 10.$$

Đường ngang $z = 10$ biểu diễn mức mà chỉ số tiến gần khi thời gian tăng trong mô hình. Với mọi $t \geq 0$ hữu hạn, $\frac{8}{t+2} > 0$, nên $z(t) > 10$; chỉ số không bằng 10 tại thời điểm hữu hạn.

Tập thời gian được xét không có điểm nào tiến sát -2 , nên không lấy $t = -2$ làm tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số trong mô hình.

Tiêu chí đối chiếu: nêu giới hạn, kiểm sự đạt được bằng dấu phần dư và giữ đúng tập đang xét.

Xem đề bài (trang 16).

Nhiệm vụ 10 – Có giá trị tại mốc vẫn cần xét lân cận

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Điểm $(2; 5)$ thuộc đồ thị là phần đúng vì $g(2) = 5$. Tuy nhiên, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$ đã đủ để $x = 2$ là tiệm cận đứng. Giá trị tại đúng mốc không thay đổi hành vi ở các điểm lân cận phía phải.

Câu sửa: “Đồ thị có điểm $(2; 5)$ và có tiệm cận đứng $x = 2$, vì giới hạn phải tại 2 bằng $+\infty$.” Dữ kiện chưa quyết định giới hạn trái; không được gán nó bằng 5 hoặc $+\infty$.

Đạt khi giữ đúng điểm trên đồ thị, viện dẫn đúng giới hạn phải và không suy thêm về phía trái. Nếu còn dùng giá trị tại mốc để bác tiệm cận, đọc lại đoạn “Nếu hàm được gán riêng giá trị tại mốc?” ở mục tiệm cận đứng (trang 10).

Xem đề bài (trang 17).

Luyện tập

Nhiệm vụ 11 – Từ giới hạn đến đường thẳng

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Hai giới hạn ở vô cực cùng bằng 2 nên xác định một tiệm cận ngang $y = 2$, ở cả đầu trái và đầu phải. Không đếm một đường hai lần.

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ đã đủ chứng minh $x = 1$ là tiệm cận đứng; giới hạn phải $+\infty$ cho thêm hành vi của nhánh bên kia. Hàm liên tục tại mọi điểm khác 1, nên không có tiệm cận đứng nào khác.

Tiêu chí đối chiếu: ghi đúng dạng phương trình, viện dẫn đúng giới hạn và không đếm đôi đường ngang.

Nếu còn sai: nhầm phía hoặc điều kiện đường đứng thì xem Giới hạn một phía (trang 31) và làm Nhiệm vụ 36 trong Sửa lỗi (trang 38); nhầm phương trình đường ngang hoặc hai đầu thì xem Tiệm cận ngang (trang 7) và làm ý a của Nhiệm vụ 37 trong Sửa lỗi (trang 38). Chọn đúng ý chưa gặp trước đó, không làm lại câu đã gặp trước đó để xác nhận. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 19) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 19).

Nhiệm vụ 12 – Tìm tập xác định trước khi tính

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Trên tập xác định này,

$$f(x) = 5 + \frac{17}{x-3}.$$

Vì phân phân thức tiến về 0 ở cả hai đầu vô cực,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5.$$

Tiệm cận ngang là $y = 5$. Khi $x \rightarrow 3^-$, mẫu âm và tiến về 0; khi $x \rightarrow 3^+$, mẫu dương và tiến về 0. Tử của phân phân thức là $17 > 0$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = 3$. Ngoài điểm này hàm liên tục, nên không còn tiệm cận đứng khác.

Tiêu chí đối chiếu: tập xác định đúng; giới hạn ở vô cực và giới hạn một phía đúng; kết luận dựa vào giới hạn.

Nếu còn sai: sai biến đổi thì xem Biến đổi phân thức (trang 32) và tự kiểm tra tác trước; sai giới hạn ở vô cực thì xem Giới hạn ở vô cực (trang 32), chọn đúng ý chưa gặp trước đó ở bảng chọn câu sửa (trang 34); sai dấu hoặc phía tại mốc thì xem Giới hạn một phía (trang 31) và làm Nhiệm vụ 36 trong Sửa lỗi (trang 38). Câu chỉ tính giới hạn tại mốc không xác nhận phần ở vô cực. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 19) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 19).

Nhiệm vụ 13 – Một điểm hở

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Với $x \neq 3$,

$$u(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 3^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} u(x) = 6$. Cả hai giới hạn đều hữu hạn, nên $x = 3$ không là tiệm cận đứng. Nhận định đã cho sai.

Giới hạn bằng 6 không làm $u(3)$ được xác định. Đồ thị có điểm hở ở $(3; 6)$.

Tiêu chí đối chiếu: giữ điểm loại sau rút gọn và không đồng nhất giới hạn với giá trị tại điểm.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 32), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 35 trong Sửa lỗi (trang 37). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 20) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 20).

Nhiệm vụ 14 – Chỉ có một phía để tiến gần

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định đã cho là $D = (4; +\infty)$. Khi $x \rightarrow 4^+$, ta có $\sqrt{x-4} \rightarrow 0^+$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty.$$

Vậy $x = 4$ là tiệm cận đứng. Không xét phía trái vì không có điểm thuộc D ở phía ấy.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, nên $y = 0$ là tiệm cận ngang. Không xét giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$ vì tập xác định chỉ gồm các giá trị lớn hơn 4.

Tiêu chí đối chiếu: xét đúng các hướng tập xác định cho phép và hiểu một phía vô cực đã đủ.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 31), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 36 trong Sửa lỗi (trang 38). Chỉ làm phần

khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 20) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 20).

Nhiệm vụ 15 – Không bỏ sót đầu trái

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Giới hạn ở đầu phải cho đường $y = 7$; giới hạn ở đầu trái cho đường $y = -2$. Đó là hai tiệm cận ngang khác nhau.

Hai dữ kiện chỉ mô tả hành vi ở vô cực, chưa cho biết hàm số tiến tới đâu gần các mốc hữu hạn. Vì vậy không thể từ đó kết luận đồ thị không có tiệm cận đứng.

Tiêu chí đối chiếu: ghi đủ hai hướng và phân biệt điều suy ra được với điều chưa đủ dữ kiện.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 7), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 37 trong Sửa lỗi (trang 38). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 20) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 20).

Nhiệm vụ 16 – Thương và phần dư

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Kiểm phép chia bằng

$$(x+2)(x+1)+5=x^2+3x+7.$$

Với $x \neq -2$, suy ra $f(x) = x+1 + \frac{5}{x+2}$. Vì thế

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0.$$

Đường tiệm cận xiên là $y = x+1$. Phần dư có tử dương, nên

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = -2$. Hàm liên tục ở các điểm còn lại.

Tiêu chí đối chiếu: phép chia, phép nhân kiểm lại, giới hạn của hiệu và giới hạn tại điểm loại đều đúng.

Nếu chia sai hoặc thiếu hệ số tự do: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 32), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 38 trong Sửa lỗi (trang 38). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 21) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 21).

Nhiệm vụ 17 – Đừng bỏ mất hệ số tự do

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Trên tập xác định $x \neq 2$, chia đa thức được

$$g(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x-2}.$$

Kiểm lại bằng $(x-2)(2x+3) + 10 = 2x^2 - x + 4$. Phần dư tiến về 0 ở cả hai đầu, nên

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - (2x+3)] = 0.$$

Vậy tiệm cận xiên là $y = 2x + 3$. Mặt khác,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - 2x] = 3 \neq 0.$$

Đường $y = 2x$ bị bác bỏ. Tỷ số hệ số cao nhất chỉ giúp nhận hệ số góc trong phép chia này, chưa cho hệ số tự do.

Tiêu chí đối chiếu: tìm đủ đường thẳng và dùng đúng giới hạn hiệu để kiểm nhận định.

Nếu chia sai hoặc thiếu hệ số tự do: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 12), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 38 trong Sửa lỗi (trang 38). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 21) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 21).

Nhiệm vụ 18 – Cắt mà vẫn tiến sát

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x , hàm có tập xác định $\mathbb{R}$. Khi $x \neq 0$, ta viết

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Tử tiến về 0, mẫu tiến về 1 khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$. Vì vậy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ và tiệm cận ngang là $y = 0$.

Phương trình $f(x) = 3$ tương đương $x-1 = 0$, nên giao điểm là $(1; 3)$. Không có mâu thuẫn: định nghĩa tiệm cận ngang mô tả hành vi ở vô cực, còn giao điểm có hoành độ hữu hạn.

Tiêu chí đối chiếu: chứng minh cả giới hạn và giao điểm, rồi giải thích vì sao chúng cùng đúng.

Nếu coi giao điểm là mâu thuẫn với tiệm cận: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 7), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 37 trong Sửa lỗi (trang 38). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 21) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 21).

Nhiệm vụ 19 – Một hình, ba hành vi

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Ở nhánh bên trái, dữ kiện $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ cho tiệm cận ngang $y = -1$. Trên hình, đó là mức nhánh trái tiến gần khi đi xa về bên trái.

Ở phía phải của mốc 2, nhánh đi xuống không bị chặn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. Do đó $x = 2$ là tiệm cận đứng. Khi đi xa về bên phải, hiệu với $2x + 1$ tiến về 0, nên $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên ở đầu phải.

b) Giới hạn trái bằng 4 chỉ mô tả nhánh trái tại mốc 2. Điều kiện tiệm cận đứng cần ít nhất một phía vô cực; giới hạn phải đã thỏa điều kiện, nên giới hạn trái hữu hạn không bác kết luận.

c) Một ảnh chỉ thể hiện của sổ hữu hạn. Các giới hạn được cho bảo đảm kết luận về hành vi ở xa; không thay chúng bằng việc ước lượng một đoạn trông gần thẳng.

Tiêu chí đối chiếu: chỉ đúng ba hành vi trên hình và viện dẫn đúng dữ kiện tương ứng.

Nếu không nổi được dữ kiện với đúng nhánh: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 15), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 39 trong Sửa lỗi (trang 39). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 21) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 21).

Nhiệm vụ 20 – Nhiệt độ trong mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Khi $t \geq 0$, ta có

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 6.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang $h = 6$: trong mô hình, nhiệt độ tiến gần 6°C khi thời gian tăng.

b) Với mọi $t \geq 0$ hữu hạn, $\frac{18}{t+2} > 0$, nên $h(t) > 6$. Không có thời điểm hữu hạn tại đó nhiệt độ bằng đúng mức này.

c) Mô hình chỉ xét $t \geq 0$, nên thời gian không thể tiến sát -2 . Vì vậy $t = -2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình đã cho, dù mẫu của công thức bằng 0 tại đó.

Tiêu chí đối chiếu: giữ đủ giới hạn, đơn vị, điều kiện không đạt và tập thời gian được xét.

Nếu bỏ tập đang xét hoặc nhầm mức tiến tới với mức đạt được: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 15), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 38 trong Sửa lỗi (trang 38). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 22) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 22).

Phối hợp

Nhiệm vụ 21 – Tiệm cận và giá trị không đạt

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Với $x \geq 0$, ta có $x + 1 \geq 1$, nên

$$0 < \frac{6}{x+1} \leq 6, \quad 2 < C(x) \leq 8.$$

Dấu bằng $C(x) = 8$ xảy ra tại $x = 0$, nên giá trị lớn nhất là 8 và đạt tại 0.

Để loại mọi ứng viên cho giá trị nhỏ nhất, lấy bất kì $x \geq 0$ và xét điểm $x + 1$ cũng thuộc tập xác định. Vì $x + 2 > x + 1 > 0$,

$$C(x+1) = 2 + \frac{6}{x+2} < 2 + \frac{6}{x+1} = C(x).$$

Mỗi giá trị đều có một giá trị nhỏ hơn, nên hàm không có giá trị nhỏ nhất. Đồng thời $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 2$ cho tiệm cận ngang $y = 2$; mức tiến tới ấy không được đạt.

Tiêu chí đối chiếu: nêu điểm đạt giá trị lớn nhất; chứng minh không có giá trị nhỏ nhất, không chỉ nói mức 2 không đạt.

Xem đề bài (trang 22).

Chuyển giao

Nhiệm vụ 22 – Hai đường xiên khác nhau

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Khi $x \rightarrow +\infty$, nhân liên hợp được

$$\sqrt{x^2 + 9} - x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} + x} \rightarrow 0.$$

Mẫu dương và tăng không bị chặn ở hướng này, nên $y = x$ là tiệm cận xiên ở đầu phải.

Khi $x \rightarrow -\infty$, xét đường khác:

$$\sqrt{x^2 + 9} + x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} - x} \rightarrow 0.$$

Ở hướng này, $-x \rightarrow +\infty$ và mẫu cũng tăng không bị chặn, nên $y = -x$ là tiệm cận xiên ở đầu trái. Không lấy một đường làm kết luận cho cả hai đầu.

Tiêu chí đối chiếu: chọn đúng hiệu ở mỗi hướng; giải thích mẫu tiến ra vô cực; không dùng $\sqrt{x^2} = x$ khi $x < 0$.

Xem đề bài (trang 23).

Kiểm tra

Nhiệm vụ 23 – Hai hàm ở cùng một mốc

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Đúng tập xác định của cả hai hàm; mỗi tập xác định 0,5	1
b	Đúng giới hạn và căn cứ của từng hàm; mỗi hàm 1	2
c	Phân loại đúng hai đường đứng có lí do: 0,5; giữ $p(4)$ không xác định: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

a) Hai tập xác định tự nhiên đều là $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) Với $x \neq 4$, ta có $p(x) = x + 4$. Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} p(x) = 8.$$

Với q , mẫu $(x - 4)^2$ dương và tiến về 0 từ cả hai phía, còn tử bằng $3 > 0$. Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} q(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} q(x) = +\infty.$$

c) Đường $x = 4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị p , nhưng là tiệm cận đứng của đồ thị q . Phép rút gọn không làm $p(4)$ được xác định, nên không được gán $p(4) = 8$.

Tiêu chí đối chiếu: xem riêng tập xác định, hai giới hạn của mỗi hàm, kết luận tiệm cận và giá trị tại điểm.

Nếu còn sai ở mục tiêu đang đối chiếu: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 5), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 40 trong Sửa lỗi (trang 40). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 24) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 24).

Nhiệm vụ 24 – Đọc hai đầu và một mốc hữu hạn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Hai đường ngang kèm hướng: 1; đường đứng kèm phía: 0,5	1,5
b	Chỉ đúng hành vi ở hai đầu xa: 0,5; phía trái tại mốc: 0,5; phía phải tại mốc: 0,5	1,5
c	Nêu một phía vô cực là đủ: 0,5; giải thích giới hạn trái hữu hạn không bác điều kiện phải: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

a) Giới hạn ở đầu trái bằng 1 cho tiệm cận ngang $y = 1$ khi $x \rightarrow -\infty$. Giới hạn ở đầu phải bằng -4 cho tiệm cận ngang $y = -4$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, đường $x = -1$ là tiệm cận đứng. Hàm liên tục tại các điểm còn lại của tập xác định nên không có tiệm cận đứng khác.

b) Nhánh trái tiến gần mức 1 khi đi xa về bên trái, rồi kết thúc bằng điểm hở $(-1; 3)$. Nhánh phải đi lên không bị chặn khi tiến gần mốc -1 từ phải, rồi tiến gần mức -4 khi đi xa về bên phải. Cần chỉ từng phần trên hình, không chỉ đọc lại ba phương trình.

c) Giới hạn trái hữu hạn không xóa điều kiện vô cực đã đúng ở phía phải. Một phía vô cực đủ để kết luận tiệm cận đứng.

Tiêu chí đối chiếu: đủ hai đầu, đúng dạng phương trình và đúng nhánh; giải thích được vai trò của từng giới hạn một phía.

Nếu không nổi được dữ kiện với đúng nhánh: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 10), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 43 trong Sửa lỗi (trang 41). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 24) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 24).

Nhiệm vụ 25 – Đường xiên cần đủ hai hệ số

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Tập xác định: 0,5; thương và dư đúng: 0,5	1
b	Đường xiên đúng: 0,5; kiểm tra giới hạn của hiệu ở hai đầu: 1	1,5
c	Tính giới hạn hiệu với đường đề nghị: 0,5; so với điều kiện định nghĩa: 0,5	1
d	Hai giới hạn một phía và lí do về dấu: 1; phương trình đường đứng: 0,5	1,5

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Với $x \neq -1$,

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{7}{x+1},$$

vì $(x+1)(2x+1) + 7 = 2x^2 + 3x + 8$. Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0.$$

Tiệm cận xiên là $y = 2x + 1$. Trong khi đó, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] = 1 \neq 0$, nên đường $y = 2x$ được đề nghị không đúng.

Tại điểm loại, phần dư có tử dương và mẫu đổi dấu qua -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = -1$.

Tiêu chí đối chiếu: giữ tập xác định; chia và kiểm tra giới hạn của hiệu đúng; xét đường đứng bằng giới hạn riêng tại điểm loại.

Nếu chia sai hoặc thiếu hệ số tự do: xem Biến đổi phân thức (trang 32), rồi dùng ý a của Nhiệm vụ 42 trong Sửa lỗi sau Kiểm tra (trang 40). Nếu sai dấu hoặc điều kiện đường đứng ở ý d, xem Giới hạn một phía (trang 31), rồi chọn ý b của Nhiệm vụ 40 trong Sửa lỗi sau Kiểm tra (trang 40). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 25) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 25).

Nhiệm vụ 26 – Một phản ví dụ cần hai điều

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Biến đổi và giới hạn ở hai đầu: 0,5; đường ngang: 0,5	1
b	Giao điểm: 0,5; kiểm tập xác định: 0,5	1
c	Bác nhận định: 0,5; giải thích bằng định nghĩa và giao điểm hữu hạn: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

Mẫu $x^2 + 4$ dương với mọi x . Khi $x \neq 0$,

$$\frac{x+3}{x^2+4} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -2$, nên $y = -2$ là tiệm cận ngang.

Mặt khác, $g(x) = -2$ tương đương $x + 3 = 0$. Giao điểm là $(-3; -2)$, thuộc đồ thị vì mẫu tại đó khác 0.

Hàm này vừa có tiệm cận ngang vừa cắt đường ấy, nên nhận định đã cho sai. Giao điểm hữu hạn không trái điều kiện giới hạn ở vô cực.

Tiêu chí đối chiếu: có phép tính giới hạn, có giao điểm hợp lệ và có lời giải thích nối hai kết quả.

Nếu coi giao điểm là mâu thuẫn với tiệm cận: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 7), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 41 trong Sửa lỗi (trang 40). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 25) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 25).

Nhiệm vụ 27 – Giới hạn của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	Giới hạn và đường ngang: 1; ý nghĩa cùng đơn vị: 0,5	1,5
b	Kết luận sự đạt được: 0,5; căn cứ dấu phần dư trên tập đang xét: 1	1,5
c	Bác đường đúng đề nghị: 0,5; chỉ rõ không có thời điểm hợp lệ tiến sát mốc: 0,5	1

Chấp nhận cách giải khác có căn cứ tương đương. Cho điểm theo phần thực sự làm được; không cộng phần lí do khi chỉ có đáp số.

Khi $t \rightarrow +\infty$ với điều kiện $t \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 9.$$

Tiệm cận ngang là $A = 9$. Trong mô hình, nồng độ tiến gần 9 mg L^{-1} khi thời gian tăng.

Với mọi thời điểm hữu hạn hợp lệ, $t + 4 > 0$ nên $\frac{20}{t+4} > 0$ và $A(t) > 9$. Do đó nồng độ không bằng đúng mức ấy tại một thời điểm hữu hạn.

Mô hình chỉ xét $t \geq 0$, nên thời gian không thể tiến sát -4 . Vì vậy $t = -4$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình. Khi dùng công thức, phải giữ điều kiện thời gian đã cho.

Tiêu chí đối chiếu: giới hạn và đơn vị đúng; kiểm sự đạt được bằng dấu phần dư; không mở rộng tập đang xét.

Nếu bỏ tập đang xét hoặc nhầm mức tiến tới với mức đạt được: xem lại kiến thức/thao tác liên quan (trang 15), rồi chọn đúng ý chưa gặp trước đó của Nhiệm vụ 42 trong Sửa lỗi (trang 40). Chỉ làm phần khớp lỗi thực tế; câu đã gặp trước đó dùng để học, không xác nhận lại. Sau hỗ trợ, Xem đề bài (trang 26) rồi trở về Điểm dừng đã gọi.

Xem đề bài (trang 26).

Ôn lại

Nhiệm vụ 28 – Nhớ lại tập xác định và giới hạn

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Hai hàm có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Với $x \neq 5$, $u(x) = x + 5$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} u(x) = 10.$$

Đường $x = 5$ không là tiệm cận đứng của đồ thị u và $u(5)$ vẫn không xác định. Với v , tử dương còn mẫu tiến về 0 theo dấu từng phía, nên

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} v(x) = +\infty.$$

Vậy $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị v ; $v(5)$ cũng không xác định.

b) Chia tử và mẫu của w cho x khi xét ở xa:

$$w(x) = \frac{7 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}}.$$

Ở cả hai đầu, tử tiến về 7, mẫu tiến về 2 khác 0. Tiệm cận ngang là $y = \frac{7}{2}$ khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$.

Tiêu chí đối chiếu: phân biệt hai hành vi tại điểm loại và tính đúng giới hạn ở cả hai đầu.

Xem đề bài (trang 28).

Nhiệm vụ 29 – Phần dư và giao điểm

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định của f là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vì $(x-2)(x-1) + 6 = x^2 - 3x + 8$,

$$f(x) = x - 1 + \frac{6}{x-2} \quad (x \neq 2).$$

Hiệu với $x-1$ tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$, nên tiệm cận xiên là $y = x - 1$. Tại 2, giới hạn trái là $-\infty$, giới hạn phải là $+\infty$; tiệm cận đứng là $x = 2$.

b) Mẫu $x^2 + 9 > 0$ với mọi x . Phần phân thức có thể viết thành

$$\frac{x-2}{x^2+9} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{9}{x^2}} \quad (x \neq 0).$$

Biểu thức tiến về 0 ở cả hai đầu nên tiệm cận ngang của g là $y = 1$. Giải $g(x) = 1$ được $x = 2$; giao điểm $(2; 1)$ hợp lệ. Việc cắt tại điểm hữu hạn không trái định nghĩa.

Tiêu chí đối chiếu: chia đúng và kiểm phần dư; chứng minh cả giới hạn và giao điểm ở ý thứ hai.

Xem đề bài (trang 29).

Nhiệm vụ 30 – Chọn điều cần kiểm

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định của u loại 6. Với $x \neq 6$, $u(x) = x + 6$, nên $\lim_{x \rightarrow 6} u(x) = 12$. Vì giới hạn hữu hạn, $x = 6$ không là tiệm cận đứng; $u(6)$ vẫn không xác định.

b) Tiệm cận ngang $y = 3$ ứng với đầu phải; $y = -5$ ứng với đầu trái. Khi phác, đặt đường thứ nhất phía trên trục hoành, đường thứ hai phía dưới và ghi rõ hướng tương ứng. Hai dữ kiện không xác định toàn bộ dáng điệu đồ thị ở giữa.

c) Trên tập xác định $x \neq -1$,

$$v(x) = 3x - 2 + \frac{7}{x+1},$$

vì $(x+1)(3x-2)+7 = 3x^2+x+5$. Phần dư tiến về 0 ở cả hai đầu, nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [v(x) - (3x-2)] = 0$. Tiệm cận xiên là $y = 3x - 2$.

d) Khi $t \rightarrow +\infty$ với $t \geq 0$, ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 4$. Mức nồng độ tiến tới là 4 mg L^{-1} . Với mọi thời điểm hữu hạn thỏa điều kiện, $\frac{15}{t+3} > 0$, nên $B(t) > 4$; nồng độ không đạt mức ấy. Thời gian $t \geq 0$ không thể tiến sát -3 , nên $t = -3$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình.

Tiêu chí đối chiếu: xem riêng từng ý; ghi phần chưa giải thích được thay vì nhận cả lượt chỉ từ vài đáp số đúng.

Xem đề bài (trang 29).

Sửa lỗi

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 35 – Giá trị tại mốc và hành vi lân cận

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Với $x \neq 7$,

$$u(x) = \frac{(x-7)(x+7)}{x-7} = x+7.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 7^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} u(x) = 14$. Hai giới hạn hữu hạn nên $x = 7$ không là tiệm cận đứng. Phép rút gọn không thêm 7 vào tập xác định, vì thế $u(7)$ không xác định.

b) Điểm $(-1; 4)$ thuộc đồ thị là phần đúng vì $v(-1) = 4$. Tuy nhiên, $\lim_{x \rightarrow -1^-} v(x) = -\infty$ đã đủ để $x = -1$ là tiệm cận đứng; giá trị tại đúng mốc không xóa hành vi ở lân cận phía trái.

Câu sửa: “Đồ thị có điểm $(-1; 4)$ và có tiệm cận đứng $x = -1$, vì giới hạn trái tại -1 bằng $-\infty$.”

Dữ kiện chưa quyết định giới hạn phải; không được tự gán nó bằng 4 hoặc $-\infty$.

Tiêu chí đối chiếu: ở ý a, giữ điều kiện rút gọn và giải thích vì sao giới hạn bằng 14 không tạo giá trị tại điểm. Ở ý b, giữ dữ kiện giá trị tại mốc, viện dẫn đúng giới hạn trái và phân biệt điều đã biết với điều chưa biết về phía phải. Làm đúng ý a không tự xác nhận ý b. Sau đối chiếu, trở về đúng câu hoặc Điểm dừng đã gọi; nếu từ Nhiệm vụ 10 thì trở về câu ấy (trang 17). Câu đã xem lời giải dùng để học, không tính là xác nhận độc lập mới.

Xem đề bài (trang 37).

Nhiệm vụ 36 – Dấu ở hai phía

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Hàm có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{6\}$. Khi $x \rightarrow 6^-$, tử -4 âm và mẫu $x - 6$ âm, tiến về 0. Thương dương và tăng không bị chặn:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} v(x) = +\infty.$$

Khi $x \rightarrow 6^+$, mẫu dương và tiến về 0, còn tử âm, nên

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} v(x) = -\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = 6$. Một trong hai giới hạn vô cực đã đủ kết luận, còn việc tính cả hai giúp mô tả đúng từng nhánh.

Tiêu chí đối chiếu: giải thích được dấu từ tử và mẫu; không đoán theo một mẫu nhớ sẵn.

Xem đề bài (trang 38).

Nhiệm vụ 37 – Hai đầu và một giao điểm

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Giới hạn ở đầu phải cho tiệm cận ngang $y = -6$ khi $x \rightarrow +\infty$; giới hạn ở đầu trái cho $y = 4$ khi $x \rightarrow -\infty$.

b) Hàm g xác định trên $\mathbb{R}$ vì $x^2 + 2 > 0$. Khi $x \neq 0$,

$$\frac{x+1}{x^2+2} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Vậy tiệm cận ngang là $y = 2$. Phương trình $g(x) = 2$ tương đương $x + 1 = 0$ và cho giao điểm $(-1; 2)$.

Tiêu chí đối chiếu: ý đầu kiểm hai hướng; ý sau cần cả giới hạn lẫn giao điểm. Làm đúng một ý không thay phần còn thiếu.

Xem đề bài (trang 38).

Nhiệm vụ 38 – Giữ hằng số và giữ điều kiện của mô hình

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Trên tập xác định này,

$$f(x) = x + 3 + \frac{6}{x+1},$$

vì $(x+1)(x+3) + 6 = x^2 + 4x + 9$. Hiệu với $x+3$ tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$. Tiệm cận xiên là $y = x + 3$.

b) Khi $t \geq 0$, ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 8$. Mức tiến tới là 8°C . Phần $\frac{10}{t+5} > 0$ ở mọi thời điểm hữu hạn hợp lệ, nên $a(t) > 8$ và không đạt mức ấy.

Vì chỉ xét $t \geq 0$, thời gian không thể tiến sát -5 . Do đó $t = -5$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong mô hình.

Tiêu chí đối chiếu: kiểm đủ hệ số tự do và phần dư ở ý đầu; giữ giới hạn, sự đạt được và tập đang xét ở ý sau.

Xem đề bài (trang 38).

Nhiệm vụ 39 – Đường đứng và đường xiên từ hai nhánh**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

Ở đầu trái, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ cho tiệm cận ngang $y = 3$. Đường $x = -2$ là tiệm cận đứng do giới hạn trái tại mốc bằng $-\infty$. Ở đầu phải, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0$ cho tiệm cận xiên $y = -x - 2$.

Nhánh trái tiến gần mức 3 khi đi xa về trái và đi xuống không bị chặn khi tới -2 từ trái. Nhánh phải tiến tới điểm hở $(-2; 1)$ khi tới mốc từ phải; khi đi xa về phải, nó tiến gần đường xiên $y = -x - 2$ đi xuống. Hiệu tiến về 0 ở đầu phải mới là căn cứ nhận đường xiên; không chỉ dựa vào nét cong trông gần thẳng.

Điểm hở không phải giá trị của hàm tại -2 ; nó biểu thị giới hạn phải hữu hạn trong hình này. Giới hạn phải không thay thế giới hạn trái. Vì thế dùng điểm hở để bác đường đứng là sai.

Đạt khi chỉ đúng từng nhánh, hướng và đường tương ứng, kể cả đường xiên ở đầu phải, đồng thời giải thích được căn cứ; không chỉ chép ba phương trình. Nếu còn nhầm phía, xem Giới hạn một phía (trang 31); nếu đòi hai phía cùng vô cực, xem mục tiệm cận đứng (trang 10). Nếu nhầm nhánh xiên, xem Tiệm cận xiên (trang 12). Trở về Điểm dừng 03 (trang 22) nếu bài được gọi từ đó, hoặc nhiệm vụ đã gọi.

Xem đề bài (trang 39).

Sau Kiểm tra**Nhiệm vụ 40 – Phân biệt hữu hạn và vô cực****Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Tập xác định của p loại 8. Với $x \neq 8$, $p(x) = x + 8$, nên

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} p(x) = 16.$$

Do đó $x = 8$ không là tiệm cận đứng, còn $p(8)$ không xác định. Giới hạn hữu hạn không bổ sung giá trị tại điểm.

b) Với q , giá trị -2 không thuộc tập xác định. Khi x tiến tới -2 từ bên trái hoặc bên phải, mẫu $(x + 2)^2$ dương và tiến về 0, còn tử bằng $-3 < 0$, nên

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} q(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} q(x) = -\infty.$$

Vậy $x = -2$ là tiệm cận đứng. Mẫu bình phương khiến dấu hai phía giống nhau trong bài này.

Tiêu chí đối chiếu: phân biệt giới hạn hữu hạn/vô cực và giải thích dấu khi mẫu là bình phương.

Xem đề bài (trang 40).

Nhiệm vụ 41 – Không nhầm giới hạn với giao điểm**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Đầu phải cho tiệm cận ngang $y = 6$ khi $x \rightarrow +\infty$; đầu trái cho $y = -7$ khi $x \rightarrow -\infty$.

b) Vì $x^2 + 5 > 0$, hàm g có tập xác định $\mathbb{R}$. Chia tử và mẫu của phân thức cho x^2 khi xét ở xa:

$$\frac{x-4}{x^2+5} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } x \rightarrow \pm\infty.$$

Vậy $y = -3$ là tiệm cận ngang. Giải $g(x) = -3$ được $x = 4$, nên đồ thị cắt đường ấy tại $(4; -3)$. Giao điểm hữu hạn không bác giới hạn ở vô cực.

Tiêu chí đối chiếu: đúng đường và hướng ở ý đầu; có cả phép kiểm giới hạn lẫn giao điểm ở ý sau.

Xem đề bài (trang 40).

Nhiệm vụ 42 – Xác nhận đường xiên và ý nghĩa mô hình**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Với $x \neq 1$, ta có

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{5}{x-1},$$

vì $(x-1)(2x-1) + 5 = 2x^2 - 3x + 6$. Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0.$$

Tiệm cận xiên là $y = 2x - 1$.

b) Mô hình chỉ áp dụng trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 30$. Các thời điểm này không thể tăng không bị chặn, nên không có cơ sở xét giới hạn khi $t \rightarrow +\infty$ cho mô hình đã cho. Nhận định của bạn đã dùng công thức ngoài phạm vi áp dụng để kết luận về tiệm cận ngang.

Nếu bổ sung giả thiết mở rộng cùng công thức cho mọi $t \geq 0$, ta đang xét một mô hình mở rộng. Khi đó

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[7 + \frac{14}{t+6} \right] = 7,$$

nên mô hình mở rộng có đường ngang $b = 7$ và $b(t) > 7$ ở mọi thời điểm hữu hạn hợp lệ; mức 7 mg L^{-1} không được đạt. Kết luận có điều kiện này không tự đúng cho tập được cho ban đầu.

Tiêu chí đối chiếu: ý đầu kiểm đủ đường xiên; ý sau phân biệt mô hình đã cho với mô hình được mở rộng thêm.

Xem đề bài (trang 40).

Nhiệm vụ 43 – Điểm hở và nhánh bên kia**Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Nhánh trái tiến gần mức 2 khi $x \rightarrow -\infty$, nên có tiệm cận ngang $y = 2$ ở đầu trái. Nhánh phải đi lên không bị chặn khi $x \rightarrow 3^+$, nên $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Ở đầu phải, dữ kiện $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = 0$ cho tiệm cận xiên $y = -x + 4$. Trên hình cần chỉ đúng nhánh đi xuống ở xa về bên phải và hướng tiến gần đường xiên ấy.

b) Điểm hở $(3; -1)$ cho biết giới hạn trái tại 3 bằng -1 , đồng thời điểm này không thuộc đồ thị. Nó không mô tả giới hạn phải. Vì giới hạn phải bằng $+\infty$, điều kiện tiệm cận đứng vẫn được thỏa mãn.

c) Nhận định “có điểm hở nên không có tiệm cận đứng ở cùng hoành độ” sai. Phải xét hành vi ở từng phía, không lấy một dấu hiệu ở nhánh trái thay cho việc kiểm cả mốc.

Tiêu chí đối chiếu: chỉ đúng nhánh/hướng của ba đường, giải thích điểm hở và điều kiện một phía. Câu chỉ tính từ công thức không thay phần chỉ trên hình.

Xem đề bài (trang 41).

Sau Ôn lại**Nhiệm vụ 44 – Ôn lại tập xác định, phía và hai đầu****Lời giải và tiêu chí đối chiếu**

a) Tập xác định của u là $\mathbb{R} \setminus \{9\}$. Với $x \neq 9$, $u(x) = x + 9$, nên $\lim_{x \rightarrow 9} u(x) = 18$. Vì giới hạn hữu hạn, $x = 9$ không là tiệm cận đứng, còn $u(9)$ vẫn không xác định.

b) Với $v(x) = \frac{5}{x+4}$, tử dương và mẫu đổi dấu qua -4 . Do đó

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} v(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} v(x) = +\infty.$$

Tiệm cận đứng là $x = -4$.

c) Tiệm cận ngang ở đầu phải là $y = 8$ khi $x \rightarrow +\infty$; ở đầu trái là $y = -9$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Tiêu chí đối chiếu: xem riêng tập xác định và giới hạn hữu hạn, dấu hai phía, hai đầu vô cực; không dùng một ý đúng để nhận cả ba.

Xem đề bài (trang 42).

Nhiệm vụ 45 – Ôn lại phần dư và cách diễn giải

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

a) Trên tập xác định $x \neq 1$,

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{8}{x-1},$$

vì $(x-1)(3x+1)+8 = 3x^2-2x+7$. Hiệu với $3x+1$ tiến về 0 ở cả hai đầu, nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (3x+1)] = 0$ và tiệm cận xiên là $y = 3x + 1$.

b) Mẫu $x^2 + 7 > 0$ với mọi x . Phần phân thức của g tiến về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$, vì sau khi chia tử/mẫu cho x^2 ta được tử tiến về 0, mẫu tiến về 1. Tiệm cận ngang là $y = 4$.

Giải $g(x) = 4$ được $x = -2$, nên giao điểm là $(-2; 4)$. Việc cắt tại điểm hữu hạn phù hợp với định nghĩa.

c) Với $t \geq 0$, $t + 7 > 0$ nên

$$c(t) = 3 - \frac{16}{t+7} < 3, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 3.$$

Nồng độ tiến gần 3 mg L^{-1} từ phía dưới và không đạt mức ấy tại thời điểm hữu hạn. Giới hạn bằng 3 không cho phép kết luận $c(t) > 3$: phải xét dấu phần chênh lệch. Mốc -7 không thể tiếp cận trong điều kiện của mô hình nên không là tiệm cận đứng của đồ thị này.

Tiêu chí đối chiếu: kiểm phần dư, giao điểm và dấu tiến gần; giữ đúng điều kiện của biến, đơn vị trong mô hình.

Xem đề bài (trang 42).

Nhiệm vụ 46 – Điểm kín và hai nhánh khác nhau

Lời giải và tiêu chí đối chiếu

Ở đầu trái, $y = x - 2$ là tiệm cận xiên vì giới hạn hiệu đã cho bằng 0. Ở đầu phải, $y = 4$ là tiệm cận ngang. Đường đứng $x = 1$ được xác định bởi giới hạn trái $-\infty$.

Nhánh trái tiến gần đường xiên khi đi xa về trái và đi xuống không bị chặn khi tới 1 từ trái. Nhánh phải tiến tới điểm hở $(1; 1)$ khi tới mốc từ phải và tiến gần mức 4 khi đi xa về phải. Điểm kín $(1; 2)$ cho $g(1) = 2$; nó không thay đổi hai giới hạn một phía. Hàm vẫn có tiệm cận đứng dù có giá trị tại mốc.

Các giới hạn ràng buộc hành vi gần mốc và ở xa, không xác định mọi giá trị bên trong các khoảng hoặc một công thức duy nhất. Đạt khi tách đúng điểm kín, điểm hở, hai phía và hai đầu. Nếu còn dùng giá trị tại mốc để bác đường đứng, xem lại mục tiệm cận đứng (trang 10), rồi quay về đúng Điểm dừng Ôn lại đã gọi; câu đã xem không trở thành xác nhận mới.

Xem đề bài (trang 43).

Nguồn

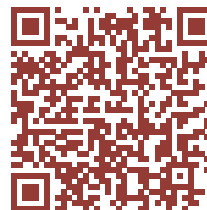
- Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, trang 106: yêu cầu về hình ảnh tiệm cận ngang, đứng, xiên và quan hệ với khảo sát đồ thị.
- Toán 12, tập một, Kết nối tri thức với cuộc sống, Bài 3, trang 20–25: đối chiếu định nghĩa và phương pháp cơ bản. Bản PDF tham khảo tương ứng trang 22–27.
- Các gói **Đơn điệu và cực trị** và **Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất** của ZO Math: mạch tập xác định, biểu diễn và sự đạt được. Nhật kí và tài nguyên nền chung được dẫn tại nơi sử dụng.

Các nhiệm vụ, dữ kiện số và mô hình giả định trong học liệu được biên soạn cho gói này. Hình được dựng từ công thức của từng hình; hình trong câu đọc đồ thị đi cùng dữ kiện giới hạn để có căn cứ kết luận chính xác. Gói không khẳng định tần suất xuất hiện của tiệm cận trong đề thi 2027.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học



Bảo trợ ZO Math

Nếu học liệu hữu ích với bạn, bạn có thể bảo trợ ZO Math tiếp tục biên soạn và chia sẻ.



Ngân hàng

Vietcombank

Số tài khoản

0601000137768

Chủ tài khoản

Nguyễn Tấn Nhật

Nội dung chuyển khoản

BAO TRỢ ZO MATH

[Xem thông tin bảo trợ ZO Math](#)