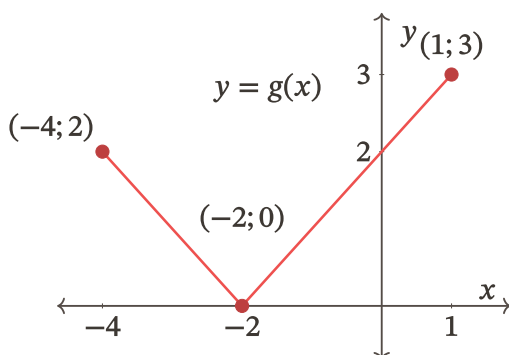


Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Lời giải và hướng dẫn chấm

Lời giải, đáp án và hướng dẫn chấm.



Mở trang Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

R1-G02

Mục lục

Bắt đầu	2
Cách học	2
Lời giải	5
Bài học	5
Luyện tập	6
Kiểm tra	10
Ôn lại	11
Sửa lỗi	12
Nguồn	19

Bắt đầu

Có thể học

Học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất” thuộc chương trình **Ôn thi Toán THPT 2027**.

Học xong, em cần làm được gì?

Học xong phần cốt lõi, em cần:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Đọc đúng đối tượng	Xác định D và tập đang xét từ đầy đủ dữ kiện; phân biệt biểu thức với hàm số.
Kiểm tra hai điều kiện	Phân biệt cực trị với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất; kiểm tra so sánh và sự đạt được.
Tìm trên đoạn đóng	Kiểm tra điều kiện, lập đủ danh sách điểm cần xét và so sánh các giá trị hàm số.
Giải thích sự tồn tại	Đọc công thức, bảng và đồ thị để xác định hoặc bác bỏ sự tồn tại trên khoảng hở, tập rời hoặc không bị chặn.
Mô hình và ràng buộc	Chọn công cụ, xác định hàm mục tiêu, tập được phép và đơn vị; kiểm tra cả ràng buộc nguyên khi có.

Tiên quyết. Em cần biết tập xác định, khoảng đơn điệu, cực trị, dấu đạo hàm, đọc bảng biến thiên và phân biệt đồ thị của hàm số với đồ thị của đạo hàm. Em cũng cần tính được đạo hàm và giá trị của các hàm số quen thuộc. Khi thiếu thao tác nào, dùng đúng thẻ **Ôn nền (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Ba nhiệm vụ Khởi động chỉ khảo sát một số phần nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc mục tiêu của gói. Kiểm tra dùng để đọc bằng chứng theo mục tiêu, không phải để mô phỏng thi.

Cách học

Chuẩn bị giấy để ghi chép. Tự làm trước khi mở lời giải; em có thể chia việc học thành nhiều buổi. Sau Khởi động, chọn phần Bài học cần đọc; Luyện tập là phần tiếp theo khi đã nắm phần học.

Chọn nơi bắt đầu

- Nếu chưa học hoặc cần học lại chủ đề, vào **Bài học (mở trên trang học liệu)**. Làm đúng các nhiệm vụ Khởi động chưa đủ để kết luận đã đạt cả gói.
- Nếu đã nắm phần học, vào **Luyện tập (mở trên trang học liệu)**. Khi vướng, xem lại đúng phần cần thiết rồi trở về đúng chỗ đang vướng.
- Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, có thể thực hiện **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)**. Không được chia Kiểm tra thành nhiều đợt.

Bản đồ học

Bài học (mở trên trang học liệu) → Luyện tập (mở trên trang học liệu) → Kiểm tra (mở trên trang học liệu) → Ôn lại (mở trên trang học liệu)

Đây là mạch học chính. Em có thể đi tới hoặc quay lại phần cần thiết; phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại được thực hiện theo ngày đã hẹn.

Trong Bài học, Luyện tập, Ôn lại và sau khi kết thúc Kiểm tra, em có thể dùng hỗ trợ theo nhu cầu:

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Xem lại kiến thức đang vận dụng	Đúng đoạn trong Bài học (mở trên trang học liệu)	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bổ sung kiến thức nền	Đúng tài nguyên Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu xác nhận của tài nguyên rồi trở về
Kiểm lại bài làm	Lời giải (trang 5); Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) nếu phát hiện lỗi	Đối chiếu, sửa và xác nhận theo chỉ dẫn của nhiệm vụ hoặc Điểm dừng
Lưu kết quả và việc tiếp theo	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi nơi sẽ tiếp tục và lịch Ôn lại khi có

Trong lúc Kiểm tra, phải tự lực hoàn toàn: không dùng Bài học, Ôn nền, Lời giải hoặc Sửa lỗi để trợ giúp bài đang làm. Nếu cần hỗ trợ, kết thúc lượt kiểm tra và giữ bài làm ban đầu trước.

Khi cần hỗ trợ

Chưa biết cách làm: nếu vướng kiến thức của gói, xem lại đúng lời giải thích hoặc ví dụ trong Bài học; nếu thiếu kiến thức nền, mở đúng tài nguyên Ôn nền. Không cần đọc lại cả gói để tiếp tục một nhiệm vụ.

Muốn kiểm lại bài làm: giữ bài tự làm trước khi mở Lời giải. Đối chiếu điều kiện, lập luận và kết quả. Nếu có lỗi, xác định bước sai và dùng hướng dẫn hoặc nhiệm vụ Sửa lỗi được chỉ định. Khi cần xác nhận sau hỗ trợ, tự làm nhiệm vụ phù hợp còn chưa xem đáp án; quay về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Ở Điểm dừng: dựa vào bài làm và tiêu chí để chọn đi tiếp hay nhận hỗ trợ. Nếu đã đáp ứng tiêu chí, không cần qua mọi nhánh hỗ trợ. Sau Kiểm tra, giữ riêng kết quả ban đầu với kết quả sau sửa.

Đã xem đáp án hoặc không còn nhiệm vụ mới phù hợp: dùng bài đã xem để học, không tính là kết quả tự làm một bài mới. Ghi phần chưa được xác nhận và làm theo chỉ dẫn tại Điểm dừng; không tự đánh dấu đã đạt.

Khi có quyết định hoặc kết thúc buổi học: ghi kết quả, hỗ trợ đã dùng, nơi đang dừng và việc tiếp theo vào Nhật kí. Chỉ điền thông tin đã có; không cần ghi sau mọi thao tác. Nếu vào thẳng phần hỗ trợ, chọn nhiệm vụ hoặc hoạt động em muốn quay về.

Khi nào có thể chuyển sang gói tiếp theo?

Em có thể chuyển sang gói tiếp theo khi bài làm độc lập cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và các lỗi cản trở việc tiếp tục đã được kiểm tra lại sau sửa. Giữ riêng kết quả ban đầu và kết quả sau hỗ trợ; ghi phần còn hạn chế cùng ngày Ôn lại vào Nhật kí. Chọn gói tiếp theo phù hợp với kiến thức em đã có, đồng thời giữ lịch Ôn lại của gói này; không cần chờ hết các lượt ôn mới học tiếp.

Hẹn Ôn lại sau khoảng **2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần**, tính từ ngày đáp ứng các điều kiện trên. Đến ngày hẹn, tự làm nhiệm vụ của lượt Ôn lại trước khi đối chiếu. Một lượt ôn chỉ cho biết kết quả ở những nội dung được kiểm tra trong lượt đó, không có nghĩa em đã làm chủ mọi tình huống của cả chủ đề. Nếu một nội dung vừa phải sửa lại, ghi thêm ngày kiểm lại sớm nội dung ấy.

Nhánh **Chuyển giao (mở trên trang học liệu)** chỉ dùng khi đã học nền lượng giác, mũ hoặc lôgarit tương ứng; không phải điều kiện để hoàn tất năm mục tiêu cốt lõi.

Lời giải

Chỉ mở lời giải của bài đã tự làm. Đối chiếu tập đang xét, điều kiện và lí do trước đáp số. Giữ bài làm ban đầu để nhận ra đúng bước cần sửa.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 — Cực đại và giá trị lớn nhất

Không. Giá trị 1 chỉ là cực đại cục bộ; $r(-3) = 5 > 1$. Toàn bảng cho giá trị lớn nhất 5 tại -3 và nhỏ nhất -2 tại 0.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 02 — Tập đang xét và điểm đạt

Nhận xét sai. Phép tính $f(2) = 0$ đúng, nhưng $2 \notin K$. Với mọi $x \in K$, ta có $f(x) > 0$, nên 0 không phải giá trị nhỏ nhất trên K . Việc có một giá trị nhỏ nhất khác hay không sẽ được xét ở Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 03 — Đọc đúng đồ thị đạo hàm

Chỉ suy ra $f'(1) = 0$. Tung độ trên đồ thị đạo hàm không phải giá trị của hàm số ban đầu.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nếu vướng câu 2, đọc mục [Hàm số được cho bằng cả quy tắc và tập xác định \(mở trên trang học liệu\)](#). Nếu vướng câu 3, hãy đọc nhãn trên hình trước: với nhãn $y = f(x)$, tung độ là $f(x)$; với nhãn $y = f'(x)$, tung độ là $f'(x)$.

Nhiệm vụ trong Bài học

Nhiệm vụ 04 — Điểm bị loại và sự đạt được

Với mọi $x \in K$, $0 < (x - 2)^2 \leq 9$; dấu bằng bên phải xảy ra tại $x = 5$. Vì vậy giá trị lớn nhất bằng 9 tại $x = 5$. Giá trị 0 không được đạt trên K vì phương trình $(x - 2)^2 = 0$ chỉ có nghiệm 2, mà $2 \notin K$.

Để loại cả khả năng có một giá trị nhỏ nhất dương, lấy bất kì $x \in K$ và đặt $y = \frac{x+2}{2}$. Khi đó $2 < y < x \leq 5$ và $f(y) = \frac{f(x)}{4} < f(x)$. Mọi giá trị của f trên K đều có một giá trị khác nhỏ hơn. Do đó hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên K .

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 05 — Hàm hằng và cực trị

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đều bằng 2, đạt tại mọi điểm thuộc $(0; 1)$: mọi giá trị đều không lớn hơn 2 và không nhỏ hơn 2. Hàm số không có điểm cực đại hay cực tiểu, vì giá trị tại mỗi điểm đều bằng các giá trị ở những điểm gần nó; không có sự lớn hơn hoặc nhỏ hơn nghiêm ngặt.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 06 — Kiểm điều kiện liên tục

Giới hạn của q khi x tiến đến 1 từ bên trái bằng 1, khác $q(1) = 0$: q không liên tục trên đoạn. Không được dùng quy trình cho hàm liên tục. Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại 0 và 1. Không có giá trị lớn nhất: với mỗi giá trị $c \in [0; 1)$, điểm $y = \frac{c+1}{2}$ thuộc $(0; 1)$ cho $q(y) = y > c$.

Cũng không được đảo thành “không liên tục thì không thể có cả hai giá trị”. Hàm bằng 0 trên $[0; 1)$ và bằng 1 tại 1 vẫn có giá trị nhỏ nhất 0 và lớn nhất 1.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 07 — Lập đủ điểm cần so sánh

Hàm số p có tập xác định $\mathbb{R}$; tập đang xét là $K = [-1; 4]$. Đoạn này nằm trong tập xác định và p liên tục trên đoạn đó. Ta có $p'(x) = 2x - 4$, bằng 0 tại $x = 2 \in (-1; 4)$. Đạo hàm tồn tại tại mọi điểm bên trong đoạn.

x	-1	2	4
$p(x)$	6	-3	1

Giá trị lớn nhất bằng 6 tại $x = -1$; giá trị nhỏ nhất bằng -3 tại $x = 2$.

Kiểm tra bằng biểu diễn khác: $p(x) = (x - 2)^2 - 3$. Trên $[-1; 4]$, khoảng cách từ x đến 2 nhỏ nhất bằng 0, lớn nhất bằng 3. Vì vậy $-3 \leq p(x) \leq 6$, với dấu bằng tại các điểm vừa tìm.

Điểm 4 lớn hơn điểm 2 về hoành độ, nhưng đó không phải tiêu chí chọn giá trị lớn nhất. Cần so sánh hàng $p(x)$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 08 — Chọn giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện

Không. Phải chọn $x = 3$ vì $P(3) = 9,2 > P(2) = 8$. Chiều biến thiên giúp chọn ứng viên; so sánh giá trị mới quyết định đáp án.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Luyện tập

Nhiệm vụ 09 – Cực đại có phải lớn nhất?

Hàm số liên tục trên đoạn. $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại -1, từ âm sang dương tại 1. Hàm số có giá trị cực đại $f(-1) = 2$, giá trị cực tiểu $f(1) = -2$.

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

Giá trị lớn nhất là 18 tại $x = 3$. Giá trị nhỏ nhất là -2, đạt tại $x = -2$ và $x = 1$.

Nhận xét sai vì chỉ xét cực đại cục bộ và bỏ đầu mút: $f(3) = 18 > 2$. Có thể kiểm tra từ ba khoảng biến thiên: tăng trên $[-2; -1]$, giảm trên $[-1; 1]$, tăng trên $[1; 3]$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 10 – Một điểm không có đạo hàm

Hàm số liên tục trên đoạn. Trên $(-4; -2)$, đạo hàm bằng -1 ; trên $(-2; 1)$, đạo hàm bằng 1 ; tại -2 đạo hàm không tồn tại nhưng giá trị hàm số vẫn có.

Cần so sánh $g(-4) = 2, g(-2) = 0, g(1) = 3$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -2$; giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 1$.

Khoảng cách từ x đến -2 trên đoạn đã cho nhỏ nhất bằng 0 , lớn nhất bằng 3 . Cách đọc này kiểm tra được kết quả mà không dùng đạo hàm.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 11 – Chọn cách so sánh trực tiếp

Điều kiện $4 - (x - 1)^2 \geq 0$ cho $D = [-1; 3]$, còn $K = [0; 3]$ là một phần của D . Trên $K, 0 \leq s(x) \leq 2$.

Giá trị lớn nhất bằng 2 , đạt tại $x = 1$. Phương trình $s(x) = 0$ có hai nghiệm -1 và 3 , nhưng chỉ 3 thuộc K . Giá trị nhỏ nhất trên K bằng 0 tại $x = 3$. So sánh trực tiếp đã đủ để kết luận, không cần tính đạo hàm. Tại đầu mút 3 , hàm vẫn có giá trị dù công thức đạo hàm ở bên trong không áp dụng tại đó.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 12 – Tập không bị chặn, hàm vẫn bị chặn

Với mọi x thực, $0 < h(x) \leq 1$, và $h(0) = 1$. Vậy giá trị lớn nhất là 1 tại $x = 0$.

Không có giá trị nhỏ nhất. Với bất cứ x nào, chọn $y = \sqrt{x^2 + 1}$; khi đó $h(y) = \frac{1}{x^2 + 2} < h(x)$. Mọi giá trị đang có đều bị một giá trị khác nhỏ hơn vượt xuống.

Số 0 là cận dưới và được tiến gần tùy ý, nhưng không đạt. Có thể kiểm tra thêm bằng $h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$: hàm tăng đến $x = 0$ rồi giảm.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 13 – Hai thành phần đều cần được xét

Trên thành phần đầu, giá trị thuộc $[-2; -1]$; trên thành phần sau, giá trị thuộc $(0; 1)$. Vì vậy mọi giá trị đều không nhỏ hơn -2 , và $f(-2) = -2$: giá trị nhỏ nhất bằng -2 tại $x = -2$.

Không có giá trị lớn nhất. Mọi giá trị ở thành phần đầu đều nhỏ hơn $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Với mỗi $x \in (0; 1)$, điểm $\frac{x+1}{2}$ cùng thuộc thành phần này và cho giá trị lớn hơn. Số 1 không được đạt.

Chỉ xét thành phần đầu sẽ cho kết luận sai rằng -1 là giá trị lớn nhất trên K .

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Công thức để đối chiếu sau khi đọc hình

$f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Hãy kiểm tra giá trị và điểm đạt trên K .

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 14 – Đọc giá trị và sự đạt được trên đồ thị

Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 0$; điểm trên đồ thị là $(0; 0)$.

Không có giá trị lớn nhất. Trên $K, 0 \leq x^2 < 4$, và các giá trị tiến gần 4 khi x tiến đến 2 từ bên trái. Để thấy mọi giá trị đều có thể bị vượt qua, với bất kì $x \in K$ đặt $t = \frac{|x|+2}{2}$. Khi đó $|x| < t < 2, t \in K$, nên $t^2 > x^2$.

Điểm hở $(2; 4)$ không thuộc phần đồ thị đang xét trên K . Hàm số vẫn có $f(2) = 4$ trên $D = \mathbb{R}$, nhưng $2 \notin K$. Để kiểm tra giá trị 4 có đạt ở điểm khác không, giải $x^2 = 4$: cả 2 và -2 đều không thuộc K . Kết hợp với lập luận ở trên, 4 là cận trên không đạt và không có giá trị lớn nhất.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 15 – Điểm nào được dùng để so sánh?

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Với $x \in D$, $f'(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x+1)^2}$. Hai nghiệm là -5 và 3 . Điểm -5 thuộc D nhưng không thuộc K , nên bị loại khỏi các điểm cần xét trên K .

Trên K , đạo hàm âm khi $-1 < x < 3$ và dương khi $x > 3$. Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 3$. Kiểm tra trực tiếp: mẫu $x + 1$ dương, tử $(x - 3)^2$ không âm, bằng 0 đúng tại 3.

Không có giá trị lớn nhất. Với $x > -1$, $f(x) = x - 7 + \frac{16}{x+1} > x - 7$. Cho bất kì số M nào, chọn $x > \max\{-1; M + 7\}$ thì $f(x) > M$. Các giá trị trên K không bị chặn trên.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 16 – Từ doanh thu đến lợi nhuận

Hàm lợi nhuận có tập xác định $D = [1; 10]$ theo mô hình, với $P(x) = -\frac{x^3}{4} + 27x - 12$, liên tục trên đoạn đó. Với $x \in (1; 10)$, $P'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4}$. Phương trình đại số $27 - \frac{3x^2}{4} = 0$ có hai nghiệm -6 và 6 ; chỉ $x = 6$ thuộc $(1; 10)$, nên chỉ điểm này là nghiệm của $P'(x) = 0$ trong khoảng đang xét.

$$P(1) = \frac{59}{4}; P(6) = 96; P(10) = 8.$$

Sản xuất 6 tấn cho lợi nhuận lớn nhất 96 triệu đồng theo mô hình.

Kiểm tra: $96 - P(x) = \frac{(x-6)^2(x+12)}{4} \geq 0$ trên $[1; 10]$, bằng 0 đúng khi $x = 6$. Đây cũng là một chứng minh trực tiếp cho kết quả.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 17 – Chi phí bình quân và ràng buộc nguyên

Tổng chi phí là

$$C(x) = xG(x) = 2x^2 + 9x + 30$$

nghìn đồng. Do đó lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 31x - 30,$$

với tập xác định của bài toán là $\{1; 2; \dots; 12\}$.

Xét hàm phụ Q có tập xác định $\mathbb{R}$ và cùng công thức:

$$Q(t) = -2t^2 + 31t - 30.$$

Parabol quay xuống và có đỉnh tại $t = \frac{31}{4} = 7,75$. Vì biến của bài toán phải nguyên, cần so sánh hai số nguyên được phép nằm hai phía của đỉnh:

$$P(7) = 89, \quad P(8) = 90.$$

Các số nguyên còn lại ở xa trục đối xứng hơn nên cho giá trị nhỏ hơn. Vậy cơ sở nên sản xuất 8 sản phẩm; lợi nhuận lớn nhất là 90 nghìn đồng.

Không được dùng quy tắc làm tròn chung vì giá trị lớn nhất trên tập số nguyên phụ thuộc vào giá trị hàm tại các ứng viên được phép. Cần so sánh trực tiếp, đặc biệt khi đỉnh nằm chính giữa hai số nguyên hoặc tập cho phép có thêm ràng buộc.

Tiêu chí đạt: lập đúng $C = xG$, không lấy G làm tổng chi phí; ghi đúng tập giá trị nguyên của x ; dùng hàm phụ biến thực có tên riêng hoặc diễn đạt tương đương; so sánh 7 và 8, không chỉ làm tròn 7,75; kết luận đủ số sản phẩm, lợi nhuận và đơn vị.

Tuyển sau bài: đạt thì quay về **Điểm dừng 03** (mở trên trang học liệu), hoàn tất **Chặng 3** (mở trên trang học liệu) nếu **Nhiệm vụ 16** (mở trên trang học liệu) cũng đạt. Sai lập mô hình hoặc đơn vị thì đi **Hàm mục tiêu và đơn vị** (mở trên trang học liệu), sai ràng buộc nguyên thì đi **Ứng viên nguyên** (mở trên trang học liệu). Sau đó chọn **Nhiệm vụ 44 của Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và đúng lỗi cần xác nhận. Không bắt buộc làm thêm một câu trước bài này; nếu bài đã gặp trước đó và không còn câu phù hợp, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Chuyển giao

Nhiệm vụ 18 – Hàm lượng giác

Hàm số liên tục trên đoạn. $f'(x) = 2 \cos x - 1$, bằng 0 tại $x = \frac{\pi}{3}$ trong đoạn. Đạo hàm dương trên $(0; \frac{\pi}{3})$ và âm trên $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

Các giá trị cần so sánh:

$$f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ tại $x = \frac{\pi}{3}$. Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 0$.

Chiều biến thiên bảo đảm giá trị ở $\frac{\pi}{3}$ lớn hơn hai đầu mút; giữa hai đầu mút, $2 - \frac{\pi}{2} > 0$ vì $\pi < 4$.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 19 – Hàm mũ và lôgarit

a) $u'(x) = e^{-x}x(2 - x)$. Hàm tăng trên $(0; 2)$, giảm trên $(2; 4)$. So sánh $u(0) = 0$, $u(2) = \frac{4}{e^2}$, $u(4) = \frac{16}{e^4}$: lớn nhất $\frac{4}{e^2}$ tại 2, nhỏ nhất 0 tại 0.

b) Hàm số v có tập xác định $D = (0; +\infty)$. Tập đang xét $K = [1; e^2]$ nằm trong D . Hàm số liên tục trên K ; trong $(1; e^2)$, $v'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Hàm tăng trên $(1; e)$, giảm trên $(e; e^2)$. Các giá trị $v(1) = 0$, $v(e) = \frac{1}{e}$, $v(e^2) = \frac{2}{e^2}$ cho lớn nhất $\frac{1}{e}$ tại e , nhỏ nhất 0 tại 1.

Cả hai hàm đều liên tục trên đoạn đang xét. Cấu trúc bài toán không đổi khi thay họ hàm số.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Kiểm tra

Nhiệm vụ 20 – Đọc đồ thị trên tập được chỉ định

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, còn $K = (1; 3]$. Dữ kiện $g(1) = 3$ đúng; suy ra giá trị lớn nhất trên K bằng 3 là sai. Điểm 1 không thuộc K , và mọi điểm của phần đồ thị đang xét đều có tung độ nhỏ hơn 3.

Hàm nghịch biến trên K nên giá trị nhỏ nhất bằng -1 , đạt tại $x = 3$. Không có giá trị lớn nhất: với bất kì $x \in K$, điểm $y = \frac{x+1}{2}$ thỏa $1 < y < x \leq 3$, nên $g(y) > g(x)$.

Điểm hồ biểu thị việc loại điểm khỏi phần đồ thị trên K ; không có nghĩa là g không xác định tại 1. Kết luận từ hình không cần biết công thức của g .

Nếu sai, xem lại đúng phần **Bài học (mở trên trang học liệu)**, rồi làm **Nhiệm vụ 49 (mở trên trang học liệu)** khi chưa xem đáp án. Giữ riêng bài kiểm tra ban đầu; kết quả sau hỗ trợ không thay thế nó. Nếu nhiệm vụ đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa được xác nhận vào **Nhật kí (mở trên trang học liệu)** và quay về **Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu)**.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 21 – Có thể đạt tại nhiều điểm

Hàm liên tục trên đoạn; $h'(x) = 3x(x-2)$. Danh sách điểm là $-1, 0, 2, 3$, với giá trị lần lượt $-3, 1, -3, 1$.

Giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = 0$ và $x = 3$; nhỏ nhất bằng -3 tại $x = -1$ và $x = 2$.

Trên $[-1; 3]$, $h(x) - 1 = x^2(x-3) \leq 0$ và $h(x) + 3 = (x+1)(x-2)^2 \geq 0$. Các trường hợp dấu bằng xác nhận đầy đủ các điểm đạt.

Nếu bỏ đầu mút hoặc chỉ xét cực trị: xem **Trên đoạn đóng (mở trên trang học liệu)**, rồi tự làm **Nhiệm vụ 48 (mở trên trang học liệu)** chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra. Kết quả sau hỗ trợ không thay bài làm tự lực ban đầu. Nếu câu đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào **Nhật kí (mở trên trang học liệu)** và trở về **Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu)**.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 22 – Đọc toàn bảng

Nhờ tính liên tục và chiều biến thiên đã cho, tập giá trị trên $[-3; -1]$ là $[2; 5]$, còn trên $(0; 2]$ là $(0; 4]$. Tập giá trị của f trên toàn K là $(0; 5]$.

Giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -3$; không có giá trị nhỏ nhất.

Giới hạn 0 ở đầu mút hồ không phải một giá trị được đạt trên K : cả hai thành phần đều chỉ cho giá trị dương. Mỗi giá trị ở thành phần đầu lớn hơn một giá trị đủ gần 0 của thành phần sau; trong thành phần sau, mọi điểm đều có điểm nhỏ hơn ở cùng thành phần cho giá trị hàm số nhỏ hơn.

Với h : $h(x) \geq 0$ và $h(-1) = 0$, nên giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại -1 . Không có giá trị lớn nhất: tại $x = -1 - t$, với $t \geq 0$, ta có $h(x) = t^2$, lớn tùy ý khi t tăng.

Nếu bỏ một thành phần hoặc lấy giới hạn làm giá trị đạt được: xem **Các tập khác đoạn đóng (mở trên trang học liệu)**, rồi tự làm **Nhiệm vụ 51 (mở trên trang học liệu)** chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra. Kết quả sau hỗ trợ không thay bài làm tự lực ban đầu. Nếu câu đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào **Nhật kí (mở trên trang học liệu)** và trở về **Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu)**.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 23 – Biến nhận giá trị nguyên

Tổng chi phí:

$$C(x) = xG(x) = 2x^2 + 10x + 50.$$

Lợi nhuận:

$$P(x) = -2x^2 + 62x - 50 = \frac{861}{2} - 2\left(x - \frac{31}{2}\right)^2.$$

Hàm lợi nhuận P có tập xác định $\{1; 2; \dots; 20\}$. Nếu dùng hàm phụ Q có tập xác định $\mathbb{R}$ và công thức $Q(t) = -2t^2 + 62t - 50$, thì Q đạt lớn nhất tại $t = 15,5$. Nhưng $15,5$ không thuộc tập xác định của P . Trên các số nguyên từ 1 đến 20, bình phương khoảng cách đến $15,5$ nhỏ nhất tại 15 và 16.

Cả 15 và 16 sản phẩm đều cho lợi nhuận lớn nhất 430 nghìn đồng.

Giá trị 430,5 là giá trị lớn nhất của Q . Không có giá trị $P(15,5)$; lợi nhuận đạt được lớn nhất của bài toán là 430 nghìn đồng.

Nếu nhầm chi phí bình quân, đơn vị hoặc số nguyên: xem [Mô hình và ràng buộc](#) (mở trên trang học liệu), rồi tự làm [Nhiệm vụ 52](#) (mở trên trang học liệu) chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra. Kết quả sau hỗ trợ không thay bài làm tự lực ban đầu. Nếu câu đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào [Nhật kí](#) (mở trên trang học liệu) và trở về [Điểm dừng 05](#) (mở trên trang học liệu).

[Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 24 – Phản biện lời giải dùng đạo hàm

Bạn bỏ điểm $x = 1$, nơi u có giá trị nhưng không có đạo hàm. Hàm liên tục trên đoạn. Cần so sánh $u(-2) = -1$, $u(1) = 2$, $u(3) = 0$.

Giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 1$; nhỏ nhất bằng -1 tại $x = -2$.

Kiểm tra bằng khoảng cách: $|x - 1|$ nhỏ nhất bằng 0 tại 1 và lớn nhất bằng 3 tại -2 .

Nếu bỏ điểm không có đạo hàm: xem [Trên đoạn đóng](#) (mở trên trang học liệu) và tự làm [Nhiệm vụ 50](#) (mở trên trang học liệu) chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra.

[Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu)

Ôn lại

Nhiệm vụ 25 – Tập xác định và sự đạt được

Điểm -1 không thuộc D nên $f(-1)$ không xác định, dù biểu thức x có nghĩa tại -1 . Giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 2$. Không có giá trị nhỏ nhất: với mỗi $x > -1$ trong tập, $y = \frac{x-1}{2}$ vẫn thuộc tập và $-1 < y < x$.

[Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 26 – Một tập không bị chặn

$0 < g(x) \leq \frac{1}{4}$; lớn nhất $\frac{1}{4}$ tại $x = 0$. Không có giá trị nhỏ nhất: chọn $y = \sqrt{x^2 + 1}$ thì $g(y) < g(x)$. Số 0 là cận dưới không đạt.

[Xem đề bài](#) (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 27 – Chọn đại lượng trong bối cảnh

Trên thời gian đang xét $[1; 3]$, vận tốc $v(t) = s'(t) = 3(t - 2)^2$ không âm, nên tốc độ bằng $v(t)$. Các giá trị cần so sánh là $v(1) = 3$, $v(2) = 0$, $v(3) = 3$. Vật chậm nhất tại $t = 2$ giây, tốc độ 0 m/s; nhanh nhất tại $t = 1$ và $t = 3$ giây, tốc độ 3 m/s. Có thể kiểm tra trực tiếp từ khoảng cách của t đến 2. Cần tối ưu tốc độ, không tối ưu tọa độ $s(t)$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Sửa lỗi**Sau Luyện tập****Nhiệm vụ 40 – Cực đại và toàn đoạn**

$f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$. Hàm liên tục trên đoạn; xét các điểm $-3, -2, 2, 5$ với giá trị lần lượt 13, 20, -12 , 69.

Giá trị lớn nhất 69 tại 5; nhỏ nhất -12 tại 2. Giá trị cực đại 20 tại -2 chỉ là so sánh cục bộ và bị $f(5)$ vượt qua.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 41 – Có cận nhưng không đạt

Phép tính đã cho chỉ tính giá trị của biểu thức tại -1 . Vì $-1 \notin D$ nên $f(-1)$ không xác định. Hàm giảm trên $(-1; 2]$. Giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại $x = 2$. Không có giá trị lớn nhất. Với mỗi x trong tập, điểm $y = -1 + \frac{x+1}{2}$ thỏa $-1 < y < x$, nên $f(y) > f(x)$.

Số 5 là cận trên không đạt; $x = -1$ bị loại. Lập luận tạo y mới loại được mọi ứng viên lớn nhất.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 42 – Điểm gãy và tọa độ

Cần xét $-4, -2, 1$, cho các giá trị $-1, 1, -2$. Giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = -2$; nhỏ nhất bằng -2 tại $x = 1$. Tại -2 , hàm có giá trị nhưng không có đạo hàm.

Ba đối tượng: $x = -2$; giá trị 1; điểm $(-2; 1)$ trên đồ thị v . Tung độ của đồ thị v' biểu diễn $v'(x)$, không biểu diễn $v(x)$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 43 – Đọc hai thành phần

Các tập giá trị tương ứng là $(1; 4]$ và $[2; 6]$; hợp là $(1; 6]$. Giá trị lớn nhất bằng 6 tại $x = 1$. Không có giá trị nhỏ nhất: số 1 không đạt, trong thành phần đầu có giá trị gần 1 tùy ý; mọi giá trị thuộc thành phần sau cũng lớn hơn một số giá trị thuộc thành phần đầu.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 44 – Tổng chi phí và số nguyên

Tổng chi phí là $xG(x) = 3x^2 + 7x + 10$. Lợi nhuận $P(x) = -3x^2 + 43x - 10$. Tập xác định của P là $\{1; 2; \dots; 15\}$. Dùng hàm phụ Q có tập xác định $\mathbb{R}$, $Q(t) = -3t^2 + 43t - 10$: Q tăng trên $(-\infty; \frac{43}{6})$, giảm trên $(\frac{43}{6}; +\infty)$. Tại các số nguyên được phép, P và Q có cùng giá trị. Vì $7 < \frac{43}{6} < 8$, trên các số nguyên chỉ cần so sánh 7 và 8; những số nguyên khác ở xa đỉnh hơn.

$P(7) = 144; P(8) = 142$. Vậy 7 sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất 144 nghìn đồng.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 45 – Đoạn đóng chưa đủ

Hàm không liên tục tại 0: giới hạn từ bên phải bằng 0, khác $r(0) = 1$. Vì vậy không thể dùng bảo đảm cho hàm liên tục trên đoạn.

Hàm vẫn có giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = 0$ và $x = 1$. Không có giá trị nhỏ nhất: với $x > 0$, $r\left(\frac{x}{2}\right) < r(x)$; còn giá trị $r(0) = 1$ bị $r\left(\frac{1}{2}\right)$ vượt xuống. Các giá trị của hàm tạo thành $(0; 1]$.

Ví dụ vừa bác bỏ việc chỉ kiểm tra đoạn đóng, vừa cho thấy thiếu tính liên tục không đồng nghĩa với không có giá trị lớn nhất.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Sau Chuyển giao

Nhiệm vụ 46 – Hàm lượng giác mới

a liên tục trên đoạn. $a'(x) = 2 \cos 2x - 1$, bằng 0 tại $\frac{\pi}{6}$, dương trước và âm sau điểm đó trong đoạn.

So sánh $a(0) = 0$, $a\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ tại $\frac{\pi}{6}$; nhỏ nhất bằng $-\frac{\pi}{2}$ tại $\frac{\pi}{2}$. Đạt khi xét đủ đầu mút, đúng dấu đạo hàm và kết luận đủ giá trị, điểm đạt.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 47 – Hàm lôgarit mới

Hàm có tập xác định $(0; +\infty)$, nên đoạn $[1; e^2]$ nằm trong tập xác định. Ta có

$$h'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

Vì $x^3 > 0$, đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua nghiệm

$$1 - 2 \ln x = 0 \iff x = \sqrt{e}.$$

Các ứng viên là 1, $\sqrt{e}$ và e^2 . Giá trị tương ứng:

$$h(1) = 0, \quad h(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}, \quad h(e^2) = \frac{2}{e^4}.$$

Hàm tăng trên $[1; \sqrt{e}]$ và giảm trên $[\sqrt{e}; e^2]$. Do đó giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2e}$, đạt tại $x = \sqrt{e}$; giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = 1$.

Tiêu chí đạt: nêu đúng tập xác định trước khi đạo hàm; tính đúng đạo hàm và điểm tới hạn; xét đủ hai đầu mút cùng điểm tới hạn; kết luận đúng giá trị và điểm đạt.

Tuyển sau bài: đạt thì quay về **Điểm dừng 04 (mở trên trang học liệu)** và ghi nhận đã xác nhận nhánh **lôgarit** trong lượt hiện tại. Bài này không kiểm tra tối ưu hàm mũ; không suy rộng kết quả sang nhánh mũ. Sai đạo hàm thì đi **Đạo hàm mũ và lôgarit (mở trên trang học liệu)**, tự làm nhiệm vụ phù hợp trong thẻ nếu chưa gặp trước đó; câu chỉ tính đạo hàm không xác nhận trọn quy trình tối ưu. Nếu đạo hàm đúng nhưng sai quy trình, quay về **lập danh sách ứng viên (mở trên trang học liệu)**. Làm lại bài này nói lại việc học, không là kết quả tự làm một bài mới. Nếu không còn nhiệm vụ cùng mục tiêu chưa gặp trước đó, ghi nhánh còn chưa được xác nhận vào **Nhật kí (mở trên trang**

học liệu) và tiếp tục mục tiêu không phụ thuộc. Kết quả nhánh này không hạ kết quả cốt lõi khi nguyên nhân là thiếu tiên quyết riêng.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 48 – Cực trị không thay cho giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Ta có

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1).$$

Các điểm tới hạn trong khoảng là $x = -1, 0, 1$. So sánh tại các ứng viên:

$$f(-2) = f(2) = 8, \quad f(-1) = f(1) = -1, \quad f(0) = 0.$$

Vậy giá trị lớn nhất là 8, đạt tại $x = -2$ và $x = 2$; giá trị nhỏ nhất là -1 , đạt tại $x = -1$ và $x = 1$.

Điểm $x = 0$ là điểm cực đại địa phương với giá trị 0, nhưng $0 < 8$. Cực đại địa phương chỉ so sánh trong một lân cận, còn giá trị lớn nhất phải so sánh trên toàn bộ tập đang xét.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: liệt kê đủ năm ứng viên và so sánh giá trị; không gọi $f(0) = 0$ là giá trị lớn nhất; ghi đủ hai điểm đạt giá trị lớn nhất và hai điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

Điểm quay về: đạt thì quay về **Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu)**. Nếu vẫn đồng nhất cực đại với giá trị lớn nhất, xem lại **Cực trị và giá trị toàn tập (mở trên trang học liệu)**. Có thể dùng **Nhiệm vụ 54 của Sửa lỗi (mở trên trang học liệu)** nếu chưa gặp trước đó; không làm lại chính bài này làm bằng chứng mới. Nếu không còn câu phù hợp, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào **Nhật kí (mở trên trang học liệu)**.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 49 – Cùng công thức, khác tập xác định

Trên $(1; 4]$, biểu thức $(x - 1)^2$ tăng từ các giá trị dương tùy ý gần 0 đến 9. Vì 1 không thuộc tập đang xét, không có điểm nào cho giá trị 0.

Đối với f , dù $f(1) = 0$ có nghĩa trên D_f , điểm 1 không thuộc K nên không được dùng khi tìm giá trị trên K . Đối với g , $g(1)$ không xác định vì $1 \notin D_g$.

Do đó cả hai bài toán trên $(1; 4]$ đều có giá trị lớn nhất là 9, đạt tại $x = 4$, và không có giá trị nhỏ nhất. Số 0 chỉ là cận dưới của tập giá trị trên $(1; 4]$.

Phép thay $x = 1$ vào biểu thức đại số cho kết quả 0; phát biểu $f(1) = 0$ đúng; phát biểu $g(1) = 0$ không có nghĩa.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: phân biệt rõ D_f , D_g và K ; không dùng $x = 1$ trong phép tối ưu trên $(1; 4]$; nói đúng rằng có giá trị lớn nhất 9 và không có giá trị nhỏ nhất; phân biệt đúng phép thay biểu thức, giá trị hàm và điểm thuộc tập đang xét.

Điểm quay về: đạt thì quay về **Điểm dừng 05 (mở trên trang học liệu)**. Nếu còn nhầm tập, học **Tập xác định (mở trên trang học liệu)**; nếu coi cận là giá trị đạt, học **Cận và sự đạt được (mở trên trang**

học liệu). Dùng **Nhiệm vụ 55 của Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi rõ mục tiêu chưa được xác nhận vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 50 – Điểm không có đạo hàm vẫn có thể là ứng viên

Hàm liên tục trên đoạn $[-1; 4]$. Điểm $x = 1$ nằm trong đoạn và là điểm không có đạo hàm, nên vẫn phải được xét cùng hai đầu mút:

$$v(-1) = 2, \quad v(1) = 0, \quad v(4) = 3.$$

Giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại hoành độ $x = 1$, tức điểm $(1; 0)$ trên đồ thị. Giá trị lớn nhất là 3, đạt tại hoành độ $x = 4$, tức điểm $(4; 3)$.

Điều kiện $v'(x) = 0$ không phải là cách duy nhất tạo ứng viên. Điểm thuộc tập đang xét mà tại đó đạo hàm không tồn tại cũng phải được kiểm tra.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: chủ động đưa $x = 1$ vào danh sách ứng viên; không viết “giá trị nhỏ nhất là $x = 1$ ”; phân biệt đúng $x = 1$, giá trị 0 và điểm $(1; 0)$.

Điểm quay về: đạt thì quay về **Điểm dừng 05** (mở trên trang học liệu). Nếu vẫn bỏ điểm gãy, học **Liên tục** (mở trên trang học liệu); nếu nhầm cách đọc đồ thị, học **Đồ thị** (mở trên trang học liệu). Dùng **Nhiệm vụ 56 của Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi rõ mục tiêu chưa được xác nhận vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 51 – Hai thành phần và một giá trị đạt

Trên $[-2; 0)$, hàm $x + 4$ có tập giá trị $[2; 4)$. Giá trị 2 đạt tại $x = -2$, còn 4 chỉ là cận trên và không đạt trên thành phần này.

Trên $[1; 3]$, hàm $5 - x$ có tập giá trị $[2; 4]$. Giá trị 4 đạt tại $x = 1$ và giá trị 2 đạt tại $x = 3$.

Gộp hai thành phần, giá trị lớn nhất của f trên K là 4, đạt tại $x = 1$. Giá trị nhỏ nhất là 2, đạt tại $x = -2$ và $x = 3$.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: xét riêng cả hai thành phần; không kết luận “không có giá trị lớn nhất” chỉ vì thành phần thứ nhất hở tại 0; ghi đúng một điểm đạt giá trị lớn nhất và hai điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

Điểm quay về: đạt thì quay về **Điểm dừng 05** (mở trên trang học liệu). Nếu sai do điểm hở hoặc giới hạn, học **Cận và sự đạt được** (mở trên trang học liệu); nếu bỏ thành phần, xem lại **Tập nhiều thành phần** (mở trên trang học liệu). Dùng **Nhiệm vụ 57 của Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi rõ mục tiêu chưa được xác nhận vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 52 – Đỉnh nằm giữa hai số nguyên

Tổng chi phí là

$$C(x) = xG(x) = 2x^2 + 4x + 42$$

nghìn đồng. Lợi nhuận là

$$P(x) = -2x^2 + 26x - 42, \quad x \in \{1; 2; \dots; 15\}.$$

Hàm phụ biến thực cùng công thức có đỉnh tại $x = \frac{13}{2} = 6,5$. Cần so sánh hai số nguyên kề đỉnh:

$$P(6) = 42, \quad P(7) = 42.$$

Vậy cả 6 và 7 sản phẩm đều cho lợi nhuận lớn nhất là 42 nghìn đồng. Nếu chỉ làm tròn 6,5 theo một quy ước, học sinh sẽ bỏ mất một phương án tối ưu.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: lập đúng tổng chi phí $xG(x)$; ghi đúng tập số nguyên; so sánh trực tiếp 6 và 7; ghi đủ hai phương án tối ưu và đơn vị.

Điểm quay về: đạt thì quay về **Điểm dừng 05** (mở trên trang học liệu). Sai mô hình đi **Hàm mục tiêu và đơn vị** (mở trên trang học liệu); sai biến nguyên đi **Ứng viên nguyên** (mở trên trang học liệu). Dùng **Nhiệm vụ 58 của Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 53 – Đoạn đóng chưa đủ để dùng định lí tồn tại

Không thể áp dụng định lí vì f không liên tục tại $x = 0$.

Ta có $f(0) = 0$, còn với mọi $x \in (0; 1]$ thì $f(x) = \frac{1}{x} \geq 1$. Do đó giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = 0$.

Hàm không có giá trị lớn nhất. Thật vậy, với mỗi $x \in (0; 1]$, số $\frac{x}{2}$ vẫn thuộc $(0; 1]$ và

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{x} > \frac{1}{x} = f(x).$$

Thiếu giả thiết của định lí chỉ có nghĩa là không được suy ra kết luận từ định lí; phải quay về định nghĩa hoặc phân tích trực tiếp. Trong bài này vẫn có giá trị nhỏ nhất nhưng không có giá trị lớn nhất.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: nêu đúng giả thiết liên tục bị thiếu; không suy ra “không có cả hai giá trị” chỉ từ việc định lí không áp dụng; chứng minh được giá trị nhỏ nhất và việc không có giá trị lớn nhất.

Điểm quay về: đạt thì quay về **Điểm dừng 05** (mở trên trang học liệu). Nếu còn dùng định lí sai điều kiện, xem lại **Điều kiện tồn tại** (mở trên trang học liệu); nếu yếu về giới hạn hoặc tính không bị chặn, học **Cận và sự đạt được** (mở trên trang học liệu). Chọn **Nhiệm vụ 59 của Sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu phù hợp chưa gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa được xác nhận vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 54 – Xen kẽ cực trị và giá trị lớn nhất

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1).$$

Các ứng viên là $-2, -1, 0, 1, 2$, với

$$f(-2) = f(2) = 9, \quad f(-1) = f(1) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Giá trị lớn nhất là 9, đạt tại $x = -2, 2$; giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = -1, 1$. Điểm $x = 0$ là điểm cực đại địa phương nhưng không cho giá trị lớn nhất trên đoạn.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi xét đủ năm ứng viên, phân biệt cực đại địa phương với giá trị lớn nhất và ghi đủ điểm đạt. Đạt thì quay về điểm Ôn lại đang thực hiện. Nếu sai, xem lại **hai điều kiện của định nghĩa** (mở trên trang học liệu), ghi mục tiêu chưa xác nhận và rút ngắn lịch ôn. Nếu các nhiệm vụ phù hợp trong **bảng chọn bài sửa lỗi** (mở trên trang học liệu) đều đã gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này”; không tự đặt một bài khác làm bằng chứng.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 55 – Khoảng nửa kín và điểm ngoài tập

Trên $(0; 2]$, hàm tăng. Giá trị lớn nhất là 3, đạt tại $x = 2$. Hàm không có giá trị nhỏ nhất vì các giá trị có thể tiến tùy ý gần 1 nhưng không bằng 1. Phép thay $x = 0$ vào biểu thức cho 1, nhưng $0 \notin D$, nên $f(0)$ không xác định.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi phân biệt đúng biểu thức, tập xác định và sự đạt được. Đạt thì quay về điểm Ôn lại. Nếu sai, xem lại **Tập xác định** (mở trên trang học liệu) hoặc **Cận và sự đạt được** (mở trên trang học liệu) theo nguồn lỗi. Có thể dùng **Nhiệm vụ 29 của Ôn nền** (mở trên trang học liệu) nếu chưa gặp trước đó và đúng phần cần xác nhận; nếu đã gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu), không lấy bài cũ làm bằng chứng mới.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 56 – Điểm gãy và tọa độ

Điểm gãy là $x = \frac{3}{2}$. So sánh

$$f(0) = 3, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \quad f(2) = 1.$$

Giá trị lớn nhất là 3, đạt tại $x = 0$, tức điểm $(0; 3)$. Giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = \frac{3}{2}$, tức điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. Điểm không có đạo hàm vẫn là một ứng viên cần xét.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi đưa điểm gãy vào danh sách và không nhầm hoành độ với giá trị. Đạt thì quay về điểm Ôn lại; sai thì học **Liên tục** (mở trên trang học liệu) hoặc **Đồ thị** (mở trên trang học liệu) theo nguyên nhân. Nếu còn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong thẻ nền hoặc **bảng chọn bài sửa lỗi** (mở trên trang học liệu), tự làm để xác nhận. Nếu không còn, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào **Nhật kí** (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 57 – Tập rời và điểm hở

Trên $(-1; 0]$, tập giá trị là $(-1; 0]$; trên $(2; 4]$, tập giá trị là $(2; 4]$. Do đó giá trị lớn nhất là 4, đạt tại $x = 4$. Hàm không có giá trị nhỏ nhất vì -1 chỉ là cận dưới và không đạt.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi xét cả hai thành phần, không lấy -1 làm giá trị nhỏ nhất và ghi điểm đạt của giá trị lớn nhất. Đạt thì quay về điểm Ôn lại; sai thì học **Cận và sự đạt được** (mở trên trang học liệu). Chọn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong **bảng chọn bài sửa lỗi** (mở trên

trang học liệu) để xác nhận; nếu không còn, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 58 – Hai nghiệm nguyên cùng tối ưu

Hàm phụ biến thực có đỉnh tại $x = \frac{7}{2} = 3,5$. So sánh hai số nguyên kề đỉnh:

$$P(3) = 7, \quad P(4) = 7.$$

Vậy 3 và 4 sản phẩm đều cho lợi nhuận lớn nhất là 7 nghìn đồng.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi so sánh trực tiếp hai ứng viên, giữ đủ hai phương án và ghi đơn vị. Đạt thì quay về điểm Ôn lại; sai thì học Ứng viên nguyên (mở trên trang học liệu) và rút ngắn lịch Ôn lại. Chọn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong thẻ nền hoặc bảng chọn bài sửa lỗi (mở trên trang học liệu) để xác nhận; nếu không còn, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (mở trên trang học liệu).

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 59 – Quay về định nghĩa khi hàm gián đoạn

Hàm không liên tục tại $x = 2$: giới hạn bên trái bằng 4, khác $f(2) = -1$. Với $0 \leq x < 2$, ta có $f(x) = x^2 \geq 0 > -1 = f(2)$. Giá trị nhỏ nhất là -1 , chỉ đạt tại $x = 2$.

Hàm không có giá trị lớn nhất. Với mọi $x \in [0; 2)$, chọn $y = \frac{x+2}{2}$; khi đó $0 \leq x < y < 2$ và $f(y) = y^2 > x^2 = f(x)$. Tại $x = 2$, giá trị -1 bị $f(0) = 0$ vượt qua. Số 4 là cận trên không đạt; luận vừa nêu loại được mọi ứng viên lớn nhất.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi không áp dụng sai định lí, phân biệt giá trị tại điểm ghép với giới hạn, chứng minh không có giá trị lớn nhất và xác định đúng điểm đạt giá trị nhỏ nhất. Đạt thì quay về điểm Ôn lại. Nếu sai, xem lại Điều kiện tồn tại (mở trên trang học liệu) và bảng chọn bài sửa lỗi (mở trên trang học liệu). Nếu không còn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (mở trên trang học liệu); không tự ghi mục tiêu ấy đã đạt.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (2018), trang 106–107, nêu yêu cầu nhận biết giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập cho trước và xác định bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.
- *Sách giáo khoa Toán 10, tập hai — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 15, trang 6–7 (trang 7–8 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu định nghĩa hàm số, tập xác định và cách cho hàm số trên một tập được chỉ rõ.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 2, trang 15–19 (trang 17–21 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu định nghĩa và phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- *Sách giáo viên Toán 12 — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 2, trang 41–42 (trang 42–43 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu mục tiêu và cách tổ chức hoạt động học.
- Học liệu *Đơn điệu và cực trị* được dùng để nối kiến thức về tập xác định, tính đơn điệu, cực trị, bảng biến thiên và đồ thị.

Các tình huống số trong học liệu được biên soạn cho học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”. Gói tập trung vào việc xét đúng tập, kiểm tra sự đạt được và giải thích kết luận; bài toán tối ưu tổng hợp, tiệm cận và biện luận tham số thuộc các gói khác.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học