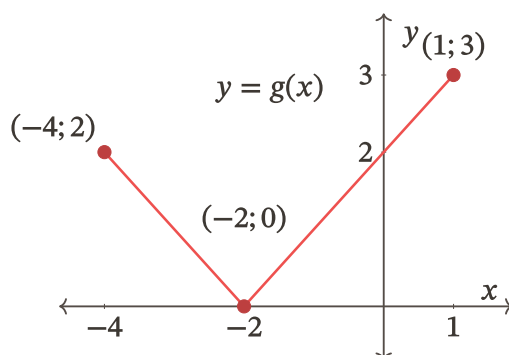


Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Bài học

Kiến thức nền, ví dụ và câu hỏi tự kiểm tra.



Mở trang Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

R1-G02

Mục lục

Bắt đầu	2
Cách học	2
Bài học	5
Khởi động	5
1. Hàm số và tập đang xét	6
2. So sánh và sự đạt được	7
3. Tìm trên đoạn đóng	9
4. Các tập khác đoạn đóng	11
5. Mô hình và ràng buộc	12
Khép lại bài học	13
Nguồn	14

Bắt đầu

Có thể học

Học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất” thuộc chương trình **Ôn thi Toán THPT 2027**.

Học xong, em cần làm được gì?

Học xong phần cốt lõi, em cần:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Đọc đúng đối tượng	Xác định D và tập đang xét từ đầy đủ dữ kiện; phân biệt biểu thức với hàm số.
Kiểm tra hai điều kiện	Phân biệt cực trị với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất; kiểm tra so sánh và sự đạt được.
Tìm trên đoạn đóng	Kiểm tra điều kiện, lập đủ danh sách điểm cần xét và so sánh các giá trị hàm số.
Giải thích sự tồn tại	Đọc công thức, bảng và đồ thị để xác định hoặc bác bỏ sự tồn tại trên khoảng hở, tập rời hoặc không bị chặn.
Mô hình và ràng buộc	Chọn công cụ, xác định hàm mục tiêu, tập được phép và đơn vị; kiểm tra cả ràng buộc nguyên khi có.

Tiên quyết. Em cần biết tập xác định, khoảng đơn điệu, cực trị, dấu đạo hàm, đọc bảng biến thiên và phân biệt đồ thị của hàm số với đồ thị của đạo hàm. Em cũng cần tính được đạo hàm và giá trị của các hàm số quen thuộc. Khi thiếu thao tác nào, dùng đúng thẻ **Ôn nền (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Ba nhiệm vụ Khởi động chỉ khảo sát một số phần nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc mục tiêu của gói. Kiểm tra dùng để đọc bằng chứng theo mục tiêu, không phải để mô phỏng thi.

Cách học

Chuẩn bị giấy để ghi chép. Tự làm trước khi mở lời giải; em có thể chia việc học thành nhiều buổi. Sau Khởi động, chọn phần Bài học cần đọc; Luyện tập là phần tiếp theo khi đã nắm phần học.

Chọn nơi bắt đầu

- Nếu chưa học hoặc cần học lại chủ đề, vào Bài học (trang 5). Làm đúng các nhiệm vụ Khởi động chưa đủ để kết luận đã đạt cả gói.
- Nếu đã nắm phần học, vào **Luyện tập (mở trên trang học liệu)**. Khi vướng, xem lại đúng phần cần thiết rồi trở về đúng chỗ đang vướng.
- Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, có thể thực hiện **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)**. Không được chia Kiểm tra thành nhiều đợt.

Bản đồ học

Bài học (trang 5) → Luyện tập (mở trên trang học liệu) → Kiểm tra (mở trên trang học liệu) → Ôn lại (mở trên trang học liệu)

Đây là mạch học chính. Em có thể đi tới hoặc quay lại phần cần thiết; phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại được thực hiện theo ngày đã hẹn.

Trong Bài học, Luyện tập, Ôn lại và sau khi kết thúc Kiểm tra, em có thể dùng hỗ trợ theo nhu cầu:

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Xem lại kiến thức đang vận dụng	Đúng đoạn trong Bài học (trang 5)	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bổ sung kiến thức nền	Đúng tài nguyên Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu xác nhận của tài nguyên rồi trở về
Kiểm lại bài làm	Lời giải (mở trên trang học liệu); Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) nếu phát hiện lỗi	Đối chiếu, sửa và xác nhận theo chỉ dẫn của nhiệm vụ hoặc Điểm dừng
Lưu kết quả và việc tiếp theo	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi nơi sẽ tiếp tục và lịch Ôn lại khi có

Trong lúc Kiểm tra, phải tự lực hoàn toàn: không dùng Bài học, Ôn nền, Lời giải hoặc Sửa lỗi để trợ giúp bài đang làm. Nếu cần hỗ trợ, kết thúc lượt kiểm tra và giữ bài làm ban đầu trước.

Khi cần hỗ trợ

Chưa biết cách làm: nếu vướng kiến thức của gói, xem lại đúng lời giải thích hoặc ví dụ trong Bài học; nếu thiếu kiến thức nền, mở đúng tài nguyên Ôn nền. Không cần đọc lại cả gói để tiếp tục một nhiệm vụ.

Muốn kiểm lại bài làm: giữ bài tự làm trước khi mở Lời giải. Đối chiếu điều kiện, lập luận và kết quả. Nếu có lỗi, xác định bước sai và dùng hướng dẫn hoặc nhiệm vụ Sửa lỗi được chỉ định. Khi cần xác nhận sau hỗ trợ, tự làm nhiệm vụ phù hợp còn chưa xem đáp án; quay về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Ở Điểm dừng: dựa vào bài làm và tiêu chí để chọn đi tiếp hay nhận hỗ trợ. Nếu đã đáp ứng tiêu chí, không cần qua mọi nhánh hỗ trợ. Sau Kiểm tra, giữ riêng kết quả ban đầu với kết quả sau sửa.

Đã xem đáp án hoặc không còn nhiệm vụ mới phù hợp: dùng bài đã xem để học, không tính là kết quả tự làm một bài mới. Ghi phần chưa được xác nhận và làm theo chỉ dẫn tại Điểm dừng; không tự đánh dấu đã đạt.

Khi có quyết định hoặc kết thúc buổi học: ghi kết quả, hỗ trợ đã dùng, nơi đang dừng và việc tiếp theo vào Nhật kí. Chỉ điền thông tin đã có; không cần ghi sau mọi thao tác. Nếu vào thẳng phần hỗ trợ, chọn nhiệm vụ hoặc hoạt động em muốn quay về.

Khi nào có thể chuyển sang gói tiếp theo?

Em có thể chuyển sang gói tiếp theo khi bài làm độc lập cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và các lỗi cản trở việc tiếp tục đã được kiểm tra lại sau sửa. Giữ riêng kết quả ban đầu và kết quả sau hỗ trợ; ghi phần còn hạn chế cùng ngày Ôn lại vào Nhật kí. Chọn gói tiếp theo phù hợp với kiến thức em đã có, đồng thời giữ lịch Ôn lại của gói này; không cần chờ hết các lượt ôn mới học tiếp.

Hẹn Ôn lại sau khoảng **2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần**, tính từ ngày đáp ứng các điều kiện trên. Đến ngày hẹn, tự làm nhiệm vụ của lượt Ôn lại trước khi đối chiếu. Một lượt ôn chỉ cho biết kết quả ở những nội dung được kiểm tra trong lượt đó, không có nghĩa em đã làm chủ mọi tình huống của cả chủ đề. Nếu một nội dung vừa phải sửa lại, ghi thêm ngày kiểm lại sớm nội dung ấy.

Nhánh **Chuyển giao (mở trên trang học liệu)** chỉ dùng khi đã học nền lượng giác, mũ hoặc lôgarit tương ứng; không phải điều kiện để hoàn tất năm mục tiêu cốt lõi.

Bài học

Câu hỏi dẫn đường

Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên một tập được chỉ định, em cần trả lời hai câu hỏi:

1. Giá trị nào không bị vượt qua trên tập đang xét?
2. Giá trị ấy có thực sự đạt được tại một điểm thuộc tập đang xét không?

Khởi động

Tự làm ba câu khởi động trên giấy trước khi mở lời giải. Sau khi đối chiếu, dùng bảng chọn phần cần ôn bên dưới để xử lý đúng câu còn vướng rồi quay lại câu ấy.

Hãy thử trả lời trên giấy trước khi mở lời giải. Không cần tính điểm; câu nào còn vướng sẽ chỉ ra phần cần ôn.

Nhiệm vụ 01 – Cực đại và giá trị lớn nhất

Hàm số r liên tục trên $[-3; 4]$, biến thiên đúng như bảng. Tại $x = 2$, hàm số có giá trị cực đại bằng 1. Có thể kết luận 1 là giá trị lớn nhất trên đoạn này không? Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thực tế là bao nhiêu?

x	-3		0		2		4
$r(x)$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Bảng biến thiên của hàm số r trên đoạn từ -3 đến 4 .

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 02 – Tập đang xét và điểm đạt

Cho hàm số $f(x) = (x - 2)^2$. Một bạn nhận xét: “Giá trị nhỏ nhất của f trên $K = (2; 5]$ bằng 0 vì $f(2) = 0$.” Nhận xét này đúng không? Vì sao?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 03 – Đọc đúng đồ thị đạo hàm

Trên một hình ghi nhãn $y = f'(x)$, điểm $(1; 0)$ thuộc đường biểu diễn. Có thể ghi $f(1) = 0$ không?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Sau khi làm xong

Nếu chưa học một mục, đọc đúng phần giải thích trong Bài học. Nếu thiếu kiến thức nền, dùng đúng tài nguyên Ôn nền, tự làm nhiệm vụ xác nhận rồi quay về câu đang vướng. Làm đúng ba câu không có nghĩa đã đạt cả gói. Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, em có thể vào Kiểm tra; sự tự tin không thay cho kết quả bài làm.

Chọn đúng phần cần ôn

Bài/điều còn vướng	Phần cần ôn	Trở lại bài
Tập xác định và tập đang xét	Phân biệt quy tắc, tập xác định và tập được chỉ định. Xem Đối tượng đang xét (trang 6); Tập xác định (mở trên trang học liệu) .	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Cực trị với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	Kiểm tra so sánh và sự đạt được. Xem So sánh và sự đạt được (trang 7).	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Quy trình trên đoạn đóng	Lập đủ ứng viên và so sánh giá trị. Xem Trên đoạn đóng (trang 9).	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Khoảng hở hoặc tập nhiều thành phần	Kiểm tra cận, điểm hở và từng thành phần. Xem Các tập khác đoạn đóng (trang 11); Cận (mở trên trang học liệu) .	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bài toán thực tiễn	Chọn đại lượng, tập được phép và đơn vị. Xem Mô hình và ràng buộc (trang 12); Mô hình (mở trên trang học liệu) .	Trở về nhiệm vụ đang vướng

1. Hàm số và tập đang xét

Gợi mở 01 — Tập xác định và tập đang xét

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Tính được $f(2)$ có đủ để dùng 2 làm điểm đạt trên tập $K = (2; 5]$ không?

Đọc tiếp để phân biệt tập xác định, tập đang xét và điểm được phép dùng.

1.1. Quy tắc và tập xác định

Để xác định một hàm số, cần biết biến số được phép nhận những giá trị nào và quy tắc gán cho mỗi giá trị ấy một giá trị duy nhất của hàm số. Tập các giá trị mà biến số được phép nhận gọi là **tập xác định D của hàm số**.

Đọc đầy đủ dữ kiện trước khi tìm D

- Nếu để cho hàm số có tập xác định K , thì $D = K$. Công thức phải có nghĩa với mọi $x \in K$.
- Nếu chỉ cho công thức và **không chỉ rõ tập xác định**, ta mới theo quy ước lấy tất cả số thực làm biểu thức có nghĩa.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 10, tập hai, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 15, trang 6 (trang 7 của tệp PDF), phần định nghĩa và chú ý về trường hợp không chỉ rõ tập xác định.

1.2. Ví dụ 01 — Tập xác định và điểm đạt

Tính được $f(2)$ chưa chắc có điểm đạt.

Đề cho $f(x) = (x - 2)^2$ mà không giới hạn tập xác định, nên $D = \mathbb{R}$. Yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất trên $K = (2; 5]$ chỉ giới hạn các điểm được đưa vào so sánh.

Đối tượng cần đọc	Kết luận trong bài này
Tập xác định D	$\mathbb{R}$: công thức có nghĩa với mọi số thực và để không cho giới hạn khác.
Tập đang xét K	$(2; 5]$: chỉ so sánh giá trị tại các điểm thuộc tập này.
Đầu mút 2	$2 \in D$ nhưng $2 \notin K$. Giá trị $f(2) = 0$ có nghĩa; 2 không được dùng làm điểm đạt trên K .
Đầu mút 5	$5 \in K$. Giá trị $f(5) = 9$ được đưa vào so sánh.

Cần phân biệt ba việc: thay số vào biểu thức, tính giá trị hàm số và xét điểm đạt trên K .

Với f ở câu khởi động, cả phép tính $(2 - 2)^2 = 0$ và kí hiệu $f(2) = 0$ đều đúng. Điều bị bỏ sót là $2 \notin K$.

Nếu một đề khác cho hàm số g có tập xác định $(2; 5]$, với $g(x) = (x - 2)^2$, thì $g(2)$ không xác định. Phép thay 2 vào biểu thức vẫn tính được 0, nhưng không phải là giá trị của g tại 2. Cùng công thức chưa đủ để kết luận hai hàm số có cùng tập xác định.

Vì vậy, D là tập xác định của hàm số đã cho; K là tập được yêu cầu xét. Hai tập có thể trùng nhau. Nếu xét trên một phần của D thì phải có $K \subseteq D$. Không tự mặc định D lớn hơn K , cũng không tự đổi D của một hàm số đã được xác định rõ.

Trước mỗi bài, hãy tự hỏi: đề đang cho tập xác định của hàm số, hay đang yêu cầu so sánh các giá trị trên một tập được chỉ định? Đọc trọn yêu cầu rồi mới quyết định D và K .

2. So sánh và sự đạt được

Gợi mở 02 — So sánh chưa đủ để có giá trị lớn nhất

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Biết $f(x) \leq M$ với mọi $x \in K$ đã đủ để gọi M là giá trị lớn nhất trên K chưa?

Định nghĩa dưới đây còn yêu cầu giá trị ấy được đạt tại một điểm thuộc K .

2.1. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Cho hàm số f có tập xác định D . Với tập không rỗng $K \subseteq D$ (có thể $K = D$), số M là **giá trị lớn nhất** của f trên K khi:

Giá trị lớn nhất trên một tập

- $f(x) \leq M$ với mọi $x \in K$.
- Có ít nhất một điểm $x_0 \in K$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $\max_{x \in K} f(x) = M$.

Giá trị nhỏ nhất trên một tập

Số m là **giá trị nhỏ nhất** của f trên K khi:

1. $f(x) \geq m$ với mọi $x \in K$.
2. Có ít nhất một điểm $x_1 \in K$ sao cho $f(x_1) = m$.

Kí hiệu: $\min_{x \in K} f(x) = m$.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 2, trang 15 (trang 17 của tệp PDF), phần định nghĩa.

Tập được yêu cầu xét là K ; khi xét toàn bộ tập xác định thì $K = D$. Cả điều kiện so sánh và điều kiện đạt được đều phải dùng cùng tập K .

Hãy viết đủ: “**Giá trị lớn nhất bằng M , đạt tại $x = x_0$.**” Số M là giá trị; x_0 là điểm đạt giá trị của hàm số; $(x_0; M)$ là một điểm trên đồ thị. Một giá trị lớn nhất có thể đạt tại nhiều điểm.

2.2. Sự đạt được

Xét $f(x) = (x - 2)^2$ trên $K = (2; 5]$.

Nhiệm vụ 04 — Điểm bị loại và sự đạt được.

Không được lấy $x = 2$. Vậy 0 có thể là giá trị nhỏ nhất không? Nếu 0 không phải giá trị nhỏ nhất, liệu có một số dương nào nhỏ nhất?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

2.3. Cận và giá trị đạt được

Nếu chỉ có $f(x) \leq M$ với mọi $x \in K$, ta mới có một **cận trên**. Nếu chỉ có $f(x) \geq m$, ta có một **cận dưới**. “Bị chặn trên”, “bị chặn dưới” nói về sự tồn tại của những cận như vậy; “bị chặn” nghĩa là có cả hai.

Ví dụ, trên $(0; 1)$, hàm số $f(x) = x$ có $0 < f(x) < 1$. Hàm số bị chặn nhưng không đạt 0 hoặc 1. Với mỗi $x \in (0; 1)$, điểm $\frac{x}{2}$ cho giá trị nhỏ hơn, còn điểm $\frac{x+1}{2}$ cho giá trị lớn hơn. Vì vậy hàm số không có cả giá trị nhỏ nhất lẫn lớn nhất trên khoảng này.

Không đạt một cận tùy ý chưa đủ để kết luận không có giá trị lớn nhất.

Hàm số hằng $f(x) = 3$ không đạt cận trên 10, nhưng có giá trị lớn nhất bằng 3. Muốn bác bỏ sự tồn tại, cần lập luận loại được mọi giá trị có thể là lớn nhất.

2.4. Cực trị và giá trị toàn tập

Nhắc lại cách nhận biết cực trị. Xét hàm số f liên tục trên một khoảng chứa x_0 . Hàm số đạt cực đại tại x_0 nếu, trong một khoảng đủ nhỏ quanh x_0 , giá trị $f(x_0)$ **lớn hơn** mọi giá trị $f(x)$ với $x \neq x_0$. Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 nếu giá trị $f(x_0)$ **nhỏ hơn** mọi giá trị như vậy. Việc so sánh xét các điểm ở cả hai phía của x_0 ; bằng nhau không thỏa điều kiện lớn hơn hoặc nhỏ hơn này.

Điều cần phân biệt	Cực đại, cực tiểu	Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên K
Phạm vi so sánh	So sánh với các điểm đủ gần ở cả hai phía; dùng bất đẳng thức nghiêm ngặt.	So sánh với mọi điểm thuộc K .
Giá trị ở vị trí khác	Giá trị cực đại có thể bị một giá trị ở xa vượt qua.	Giá trị lớn nhất không bị bất cứ giá trị nào trên K vượt qua.
Vai trò của đầu mút	Một đầu mút của tập xác định không có khoảng nhỏ quanh nó nằm trọn trong tập xác định, nên không thỏa điều kiện hai phía nêu trên.	Đầu mút thuộc K có thể là nơi đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Nếu điểm đó nằm bên trong D , phải xét hàm số ở cả hai phía mới kết luận về cực trị.

Một điểm cực trị thuộc K là một điểm cần xem xét khi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên K . Ngược lại, điểm đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất chưa chắc là điểm cực trị: giá trị ấy có thể đạt tại đầu mút, hoặc bằng các giá trị ở những điểm lân cận.

Nhiệm vụ 05 – Hàm hằng và cực trị

Cho hàm số $f(x) = 2$ có tập xác định $(0; 1)$. Hàm số có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất không? Có điểm cực đại hoặc cực tiểu không? Hãy giải thích bằng cách so sánh giá trị tại một điểm với các giá trị ở những điểm gần nó.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

3. Tìm trên đoạn đóng

Gợi mở 03 — Danh sách điểm cần so sánh

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Khi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn, chỉ tìm nghiệm của đạo hàm có đủ không?

Hãy đối chiếu điều kiện tồn tại rồi lập đủ danh sách các điểm cần xét trong quy trình dưới đây.

3.1. Điều kiện tồn tại

Bảo đảm tồn tại

Nếu f liên tục trên đoạn $[a; b]$, với $a < b$, thì f có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Cần kiểm tra $[a; b] \subseteq D$ và tính liên tục trên toàn đoạn. Một hàm được cho bởi công thức đa thức trên cả đoạn thì liên tục trên đoạn ấy; với công thức phân thức phải kiểm tra mẫu khác 0 ở mọi điểm của đoạn. Liên tục ở đầu mút được xét từ phía bên trong đoạn.

Đây là **điều kiện đủ**. Nếu thiếu điều kiện, em chưa được dùng bảo đảm trên; em cũng chưa được kết luận rằng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất không tồn tại.

Nhiệm vụ 06 – Kiểm điều kiện liên tục

Hàm q có tập xác định $[0; 1]$, với $q(x) = x$ khi $0 \leq x < 1$ và $q(1) = 0$. Một bạn chỉ so sánh $q(0) = q(1) = 0$ rồi kết luận giá trị lớn nhất bằng 0. Bạn đã bỏ điều kiện nào?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

3.2. So sánh các ứng viên

Giả sử f liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$ trừ nhiều nhất một số hữu hạn điểm, và chỉ có hữu hạn điểm bên trong đoạn thỏa $f'(x) = 0$.

1. **Lập danh sách điểm:** hai đầu mút a, b ; các điểm thuộc $(a; b)$ mà $f'(x) = 0$; các điểm thuộc $(a; b)$ mà hàm số có giá trị nhưng không có đạo hàm.
2. **Tính giá trị của f** tại tất cả các điểm trong danh sách.
3. **So sánh các giá trị**, rồi ghi giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và tất cả điểm đạt được tìm thấy.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 2, trang 18 (trang 20 của tệp PDF), phần quy trình và giả thiết.

Vì sao phải có ba nhóm điểm? Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đã được bảo đảm tồn tại. Điểm đạt có thể là đầu mút. Nếu nằm bên trong và hàm số có đạo hàm tại đó, đạo hàm phải bằng 0; nếu không có đạo hàm, điểm ấy cần được xét riêng.

Không cần tính đạo hàm tại đầu mút để đưa đầu mút vào danh sách. Khi phương trình $f'(x) = 0$ có vô số nghiệm, quy trình liệt kê hữu hạn này không áp dụng nguyên dạng. Chẳng hạn với hàm hằng, có thể kết luận ngay từ định nghĩa.

3.3. Ví dụ 02 – So sánh các ứng viên

Xét $a(x) = x^2 - 2x$ trên $[-1; 3]$. Hàm số là đa thức, liên tục trên đoạn; đạo hàm $a'(x) = 2x - 2$ tồn tại và chỉ bằng 0 tại $x = 1$ bên trong đoạn.

Danh sách cần xét gồm $-1, 1, 3$. Ta tính $a(-1) = 3, a(1) = -1, a(3) = 3$. Vì vậy giá trị nhỏ nhất là -1 tại $x = 1$; giá trị lớn nhất là 3, đạt tại **cả hai** điểm $x = -1$ và $x = 3$.

Kiểm tra trực tiếp: $a(x) = (x - 1)^2 - 1$ và $0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$ trên đoạn. Kết luận dựa vào giá trị của hàm số, không phải điểm nào có hoành độ lớn nhất. Ví dụ đã giải này dùng để học phương pháp, không tính là bài làm độc lập của em.

3.4. So sánh giá trị

Nhiệm vụ 07 — Lập đủ điểm cần so sánh.

Cho hàm số $p(x) = x^2 - 4x + 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của p trên đoạn $[-1; 4]$. Em sẽ đưa những điểm nào vào danh sách? Vì sao?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

4. Các tập khác đoạn đóng

Gợi mở 04 — Đầu mút có được lấy không?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu đổi đoạn đóng thành khoảng hở, kết quả lớn nhất, nhỏ nhất có nhất thiết được giữ nguyên không?

Các ví dụ dưới đây giữ công thức nhưng đổi tập đang xét để kiểm riêng sự đạt được.

4.1. Thay tập đang xét

Hãy trở về hai điều kiện của định nghĩa. Bảng biến thiên hoặc đồ thị giúp thấy hướng thay đổi. Một giới hạn hữu hạn ở đầu mút hở không tự tạo ra giá trị của hàm số tại đầu mút đó. Muốn gọi một số là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trên K , vẫn phải tìm được điểm thuộc K tại đó hàm số đạt số ấy.

Ở bảng sau, cho rõ hàm số $F(x) = x$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Ta giữ nguyên hàm số F và lần lượt thay tập K được yêu cầu xét.

Tập K đang xét của F	Giá trị nhỏ nhất	Giá trị lớn nhất
Trên $[0; 1]$	0 tại $x = 0$	1 tại $x = 1$
Trên $[0; 1)$	0 tại $x = 0$	Không có
Trên $(0; 1]$	Không có	1 tại $x = 1$
Trên $(0; 1)$	Không có	Không có

Ví dụ, trên $K = [0; 1)$, mỗi điểm x luôn có một điểm $y = \frac{x+1}{2}$ thuộc cùng tập với $F(y) > F(x)$. Vì thế F không có giá trị lớn nhất trên K . Dù $F(1) = 1$ có nghĩa với hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$, điểm 1 không thuộc K và không có điểm nào khác trong K cho giá trị 1.

Trên một tập không bị chặn, không được suy ngay rằng hàm số không có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Chẳng hạn x^2 trên $\mathbb{R}$ vẫn có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Một điểm hở không loại luôn cả một giá trị.

Chẳng hạn, hàm số q có tập xác định $(-1; 1]$, với $q(x) = x^2$, không có giá trị $q(-1)$. Tuy nhiên, giá trị 1 vẫn được đạt tại $x = 1$ và là giá trị lớn nhất, vì $q(x) \leq 1$ trên toàn tập xác định. Cần kiểm tra mọi điểm có thể cho cùng tung độ, không chỉ đầu mút bị loại.

4.2. Tập nhiều thành phần

Xét trường hợp tập K gồm nhiều thành phần rời nhau.

Xét từng thành phần, ghi rõ các giá trị đạt được và các cận liên quan, rồi so sánh trên **toàn bộ** K . Một mũi tên chỉ cho biết biến thiên trên phần mà nó biểu diễn. Không nối qua chỗ bị loại để kết luận đơn điệu trên cả tập.

Một thành phần không có giá trị lớn nhất không có nghĩa cả tập cũng không có. Chẳng hạn với $f(x) = x$ trên $[0; 1) \cup [2; 3]$, thành phần đầu không có giá trị lớn nhất, nhưng toàn tập có giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 3$.

4.3. Chọn công cụ

- **Công thức:** dùng biến đổi, bất đẳng thức đơn giản hoặc đạo hàm; chọn cách làm ngắn mà đủ lập luận.
- **Bảng biến thiên:** đọc toàn bảng, tập đang xét, giá trị tại điểm và giới hạn. Không tự thêm dữ kiện đạo hàm nếu bảng không cho.
- **Đồ thị:** đọc nhãn, tập được biểu diễn, tung độ, điểm kín và điểm hở. Kiểm tra xem tung độ ở một điểm hở có được đạt tại điểm khác thuộc K hay không. Hình phác không cho phép đoán chính xác một giá trị chưa được ghi hoặc xác định.
- **Lời văn:** xác định đại lượng cần tìm, biến số, tập giá trị được phép và đơn vị.

5. Mô hình và ràng buộc

Gợi mở 05 — Giữ ràng buộc khi chọn điểm đạt

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu biến chỉ nhận giá trị nguyên, có thể lấy ngay điểm đạt của mô hình liên tục làm đáp án không? Phần này giúp em xác định đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, đồng thời xác định các giá trị mà biến số được phép nhận.

5.1. Đại lượng và ràng buộc

Trong gói này, công thức doanh thu và chi phí đã được cung cấp. Em cần lập đúng hàm lợi nhuận, xác định tập đang xét rồi tìm và diễn giải giá trị lớn nhất.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Lợi nhuận = doanh thu – tổng chi phí.

Nếu để cho **chi phí bình quân cho một sản phẩm** là $G(x)$, thì tổng chi phí là $C(x) = xG(x)$, không phải $G(x)$.

Nếu x là số sản phẩm thì chỉ nhận các giá trị nguyên được phép. Có thể xét thêm một hàm số cùng công thức với biến thực để tìm vùng cần kiểm tra. Nếu hàm số này tăng rồi giảm và hoành độ điểm cực đại nằm giữa hai số nguyên liên tiếp đều được phép chọn, hãy tính và so sánh giá trị hàm số tại hai số nguyên đó. Chọn phương án cho giá trị lớn hơn, không chọn chỉ vì nó gần hoành độ cực đại hơn.

Nhiệm vụ 08 — Chọn giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện

Một hàm P tăng đến $x = 2,2$ rồi giảm. Chỉ được chọn $x = 2$ hoặc $x = 3$, với $P(2) = 8$ và $P(3) = 9,2$. Chọn số nguyên gần 2,2 nhất có cho giá trị lớn nhất không?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

5.2. Phạm vi vận dụng

Chỗ dừng của gói.

Chưa tự xây dựng mô hình hình học nhiều bước, chưa xử lí nhiều ràng buộc hoặc phân loại tham số. Những việc đó dành cho gói bài toán tối ưu và phần vận dụng tiếp theo.

Khép lại bài học

Gói về tiệm cận sẽ làm rõ hơn hành vi của đồ thị khi biến tiến đến một điểm bị loại hoặc ra vô cực. Gói bài toán tối ưu sẽ yêu cầu tự chọn biến, xây dựng hàm mục tiêu và xác định các ràng buộc. Nên em mang theo là: **xét đúng tập, kiểm tra sự đạt được và giải thích kết quả trong bối cảnh.**

Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (2018), trang 106–107, nêu yêu cầu nhận biết giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập cho trước và xác định bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.
- *Sách giáo khoa Toán 10, tập hai — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 15, trang 6–7 (trang 7–8 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu định nghĩa hàm số, tập xác định và cách cho hàm số trên một tập được chỉ rõ.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 2, trang 15–19 (trang 17–21 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu định nghĩa và phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- *Sách giáo viên Toán 12 — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 2, trang 41–42 (trang 42–43 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu mục tiêu và cách tổ chức hoạt động học.
- Học liệu *Đơn điệu và cực trị* được dùng để nối kiến thức về tập xác định, tính đơn điệu, cực trị, bảng biến thiên và đồ thị.

Các tình huống số trong học liệu được biên soạn cho học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”. Gói tập trung vào việc xét đúng tập, kiểm tra sự đạt được và giải thích kết luận; bài toán tối ưu tổng hợp, tiệm cận và biện luận tham số thuộc các gói khác.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học