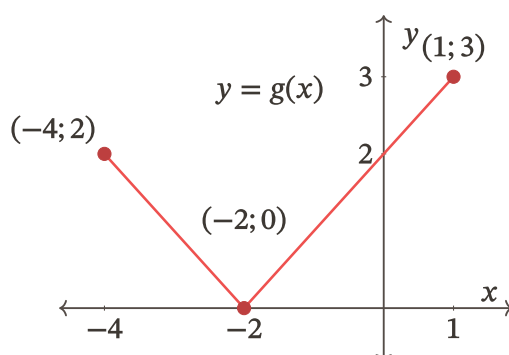


Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Bản đầy đủ, có lời giải

Có toàn bộ bài học, bài tập, lời giải và hướng dẫn chấm.



Mở trang Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

R1-G02

Mục lục

Bắt đầu	3
Cách học	3
Bài học	6
Khởi động	6
1. Hàm số và tập đang xét	7
2. So sánh và sự đạt được	8
3. Tìm trên đoạn đóng	10
4. Các tập khác đoạn đóng	12
5. Mô hình và ràng buộc	13
Khép lại bài học	14
Luyện tập	15
Chặng 1 — Đứng đối tượng và tìm đủ trên đoạn	15
Nhiệm vụ 09 – Cực đại có phải lớn nhất?	15
Nhiệm vụ 10 – Một điểm không có đạo hàm	16
Nhiệm vụ 11 – Chọn cách so sánh trực tiếp	16
Điểm dừng 01	16
Chặng 2 — Sự tồn tại trên tập khác đoạn đóng	16
Nhiệm vụ 12 – Tập không bị chặn, hàm vẫn bị chặn	17
Nhiệm vụ 13 – Hai thành phần đều cần được xét	17
Nhiệm vụ 14 – Đọc giá trị và sự đạt được trên đồ thị	17
Nhiệm vụ 15 – Điểm nào được dùng để so sánh?	18
Điểm dừng 02	18
Chặng 3 — Chọn mô hình và xử lý ràng buộc	18
Nhiệm vụ 16 – Từ doanh thu đến lợi nhuận	18
Nhiệm vụ 17 – Chi phí bình quân và ràng buộc nguyên	19
Điểm dừng 03	19
Chuyển giao có điều kiện	20
Kiểm tra	21
Nhiệm vụ 20 – Đọc đồ thị trên tập được chỉ định	21
Nhiệm vụ 21 – Có thể đạt tại nhiều điểm	21
Nhiệm vụ 22 – Đọc toàn bảng	22
Nhiệm vụ 23 – Biến nhận giá trị nguyên	22
Nhiệm vụ 24 – Phản biện lời giải dùng đạo hàm	22
Điểm dừng 05	22
Đọc kết quả	23
Ôn lại	24
Nhiệm vụ 25 – Tập xác định và sự đạt được	24
Điểm dừng 06	24
Nhiệm vụ 26 – Một tập không bị chặn	25
Điểm dừng 07	25
Nhiệm vụ 27 – Chọn đại lượng trong bối cảnh	25
Điểm dừng 08	25
Ôn nền	26
Quay về	31
Sửa lỗi	32
Chọn bài sửa lỗi	32
Sau Luyện tập	36
Sau Chuyển giao	37
Sau Kiểm tra	37
Sau Ôn lại	39
Nhật kí	41
Lời giải	43
Bài học	43
Luyện tập	44

Kiểm tra	48
Ôn lại	49
Sửa lỗi	50
Nguồn	57

Bắt đầu

Có thể học

Học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất” thuộc chương trình **Ôn thi Toán THPT 2027**.

Học xong, em cần làm được gì?

Học xong phần cốt lõi, em cần:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Đọc đúng đối tượng	Xác định D và tập đang xét từ đầy đủ dữ kiện; phân biệt biểu thức với hàm số.
Kiểm tra hai điều kiện	Phân biệt cực trị với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất; kiểm tra so sánh và sự đạt được.
Tìm trên đoạn đóng	Kiểm tra điều kiện, lập đủ danh sách điểm cần xét và so sánh các giá trị hàm số.
Giải thích sự tồn tại	Đọc công thức, bảng và đồ thị để xác định hoặc bác bỏ sự tồn tại trên khoảng hở, tập rời hoặc không bị chặn.
Mô hình và ràng buộc	Chọn công cụ, xác định hàm mục tiêu, tập được phép và đơn vị; kiểm tra cả ràng buộc nguyên khi có.

Tiên quyết. Em cần biết tập xác định, khoảng đơn điệu, cực trị, dấu đạo hàm, đọc bảng biến thiên và phân biệt đồ thị của hàm số với đồ thị của đạo hàm. Em cũng cần tính được đạo hàm và giá trị của các hàm số quen thuộc. Khi thiếu thao tác nào, dùng đúng thẻ Ôn nền (trang 26) được dẫn trong bài. Ba nhiệm vụ Khởi động chỉ khảo sát một số phần nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc mục tiêu của gói. Kiểm tra dùng để đọc bằng chứng theo mục tiêu, không phải để mô phỏng thi.

Cách học

Chuẩn bị giấy để ghi chép. Tự làm trước khi mở lời giải; em có thể chia việc học thành nhiều buổi.

Sau Khởi động, chọn phần Bài học cần đọc; Luyện tập là phần tiếp theo khi đã nắm phần học.

Chọn nơi bắt đầu

- Nếu chưa học hoặc cần học lại chủ đề, vào Bài học (trang 6). Làm đúng các nhiệm vụ Khởi động chưa đủ để kết luận đã đạt cả gói.
- Nếu đã nắm phần học, vào Luyện tập (trang 15). Khi vướng, xem lại đúng phần cần thiết rồi trở về đúng chỗ đang vướng.
- Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, có thể thực hiện Kiểm tra (trang 21). Không được chia Kiểm tra thành nhiều đợt.

Bản đồ học

Bài học (trang 6) → Luyện tập (trang 15) → Kiểm tra (trang 21) → Ôn lại (trang 24)

Đây là mạch học chính. Em có thể đi tới hoặc quay lại phần cần thiết; phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại được thực hiện theo ngày đã hẹn.

Trong Bài học, Luyện tập, Ôn lại và sau khi kết thúc Kiểm tra, em có thể dùng hỗ trợ theo nhu cầu:

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Xem lại kiến thức đang vận dụng	Đúng đoạn trong Bài học (trang 6)	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bổ sung kiến thức nền	Đúng tài nguyên Ôn nền (trang 26)	Tự làm câu xác nhận của tài nguyên rồi trở về
Kiểm lại bài làm	Lời giải (trang 43); Sửa lỗi (trang 32) nếu phát hiện lỗi	Đối chiếu, sửa và xác nhận theo chỉ dẫn của nhiệm vụ hoặc Điểm dừng
Lưu kết quả và việc tiếp theo	Nhật kí (trang 41)	Ghi nơi sẽ tiếp tục và lịch Ôn lại khi có

Trong lúc Kiểm tra, phải tự lực hoàn toàn: không dùng Bài học, Ôn nền, Lời giải hoặc Sửa lỗi để trợ giúp bài đang làm. Nếu cần hỗ trợ, kết thúc lượt kiểm tra và giữ bài làm ban đầu trước.

Khi cần hỗ trợ

Chưa biết cách làm: nếu vướng kiến thức của gói, xem lại đúng lời giải thích hoặc ví dụ trong Bài học; nếu thiếu kiến thức nền, mở đúng tài nguyên Ôn nền. Không cần đọc lại cả gói để tiếp tục một nhiệm vụ.

Muốn kiểm lại bài làm: giữ bài tự làm trước khi mở Lời giải. Đối chiếu điều kiện, lập luận và kết quả. Nếu có lỗi, xác định bước sai và dùng hướng dẫn hoặc nhiệm vụ Sửa lỗi được chỉ định. Khi cần xác nhận sau hỗ trợ, tự làm nhiệm vụ phù hợp còn chưa xem đáp án; quay về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Ở Điểm dừng: dựa vào bài làm và tiêu chí để chọn đi tiếp hay nhận hỗ trợ. Nếu đã đáp ứng tiêu chí, không cần qua mọi nhánh hỗ trợ. Sau Kiểm tra, giữ riêng kết quả ban đầu với kết quả sau sửa.

Đã xem đáp án hoặc không còn nhiệm vụ mới phù hợp: dùng bài đã xem để học, không tính là kết quả tự làm một bài mới. Ghi phần chưa được xác nhận và làm theo chỉ dẫn tại Điểm dừng; không tự đánh dấu đã đạt.

Khi có quyết định hoặc kết thúc buổi học: ghi kết quả, hỗ trợ đã dùng, nơi đang dừng và việc tiếp theo vào Nhật kí. Chỉ điền thông tin đã có; không cần ghi sau mọi thao tác. Nếu vào thẳng phần hỗ trợ, chọn nhiệm vụ hoặc hoạt động em muốn quay về.

Khi nào có thể chuyển sang gói tiếp theo?

Em có thể chuyển sang gói tiếp theo khi bài làm độc lập cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và các lỗi cản trở việc tiếp tục đã được kiểm tra lại sau sửa. Giữ riêng kết quả ban đầu và kết quả sau hỗ trợ; ghi phần còn hạn chế cùng ngày Ôn lại vào Nhật kí. Chọn gói tiếp theo phù hợp với kiến thức em đã có, đồng thời giữ lịch Ôn lại của gói này; không cần chờ hết các lượt ôn mới học tiếp.

Hẹn Ôn lại sau khoảng **2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần**, tính từ ngày đáp ứng các điều kiện trên. Đến ngày hẹn, tự làm nhiệm vụ của lượt Ôn lại trước khi đối chiếu. Một lượt ôn chỉ cho biết kết quả ở

những nội dung được kiểm tra trong lượt đó, không có nghĩa em đã làm chủ mọi tình huống của cả chủ đề. Nếu một nội dung vừa phải sửa lại, ghi thêm ngày kiểm lại sớm nội dung ấy.

Nhánh Chuyển giao (trang 20) chỉ dùng khi đã học nền lượng giác, mũ hoặc lôgarit tương ứng; không phải điều kiện để hoàn tất năm mục tiêu cốt lõi.

Bài học

Câu hỏi dẫn đường

Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên một tập được chỉ định, em cần trả lời hai câu hỏi:

1. Giá trị nào không bị vượt qua trên tập đang xét?
2. Giá trị ấy có thực sự đạt được tại một điểm thuộc tập đang xét không?

Khởi động

Tự làm ba câu khởi động trên giấy trước khi mở lời giải. Sau khi đối chiếu, dùng bảng chọn phần cần ôn bên dưới để xử lý đúng câu còn vướng rồi quay lại câu ấy.

Hãy thử trả lời trên giấy trước khi mở lời giải. Không cần tính điểm; câu nào còn vướng sẽ chỉ ra phần cần ôn.

Nhiệm vụ 01 – Cực đại và giá trị lớn nhất

Hàm số r liên tục trên $[-3; 4]$, biến thiên đúng như bảng. Tại $x = 2$, hàm số có giá trị cực đại bằng 1. Có thể kết luận 1 là giá trị lớn nhất trên đoạn này không? Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thực tế là bao nhiêu?

x	-3		0		2		4
$r(x)$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Bảng biến thiên của hàm số r trên đoạn từ -3 đến 4 .

Xem lời giải (trang 43)

Nhiệm vụ 02 – Tập đang xét và điểm đạt

Cho hàm số $f(x) = (x - 2)^2$. Một bạn nhận xét: “Giá trị nhỏ nhất của f trên $K = (2; 5]$ bằng 0 vì $f(2) = 0$.” Nhận xét này đúng không? Vì sao?

Xem lời giải (trang 43)

Nhiệm vụ 03 – Đọc đúng đồ thị đạo hàm

Trên một hình ghi nhãn $y = f'(x)$, điểm $(1; 0)$ thuộc đường biểu diễn. Có thể ghi $f(1) = 0$ không?

Xem lời giải (trang 43)

Sau khi làm xong

Nếu chưa học một mục, đọc đúng phần giải thích trong Bài học. Nếu thiếu kiến thức nền, dùng đúng tài nguyên Ôn nền, tự làm nhiệm vụ xác nhận rồi quay về câu đang vướng. Làm đúng ba câu không có nghĩa đã đạt cả gói. Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, em có thể vào Kiểm tra; sự tự tin không thay cho kết quả bài làm.

Chọn đúng phần cần ôn

Bài/điều còn vướng	Phần cần ôn	Trở lại bài
Tập xác định và tập đang xét	Phân biệt quy tắc, tập xác định và tập được chỉ định. Xem Đối tượng đang xét (trang 7); Tập xác định (trang 26).	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Cực trị với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	Kiểm tra so sánh và sự đạt được. Xem So sánh và sự đạt được (trang 8).	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Quy trình trên đoạn đóng	Lập đủ ứng viên và so sánh giá trị. Xem Trên đoạn đóng (trang 10).	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Khoảng hở hoặc tập nhiều thành phần	Kiểm tra cận, điểm hở và từng thành phần. Xem Các tập khác đoạn đóng (trang 12); Cận (trang 28).	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bài toán thực tiễn	Chọn đại lượng, tập được phép và đơn vị. Xem Mô hình và ràng buộc (trang 13); Mô hình (trang 30).	Trở về nhiệm vụ đang vướng

1. Hàm số và tập đang xét

Gợi mở 01 — Tập xác định và tập đang xét

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Tính được $f(2)$ có đủ để dùng 2 làm điểm đạt trên tập $K = (2; 5]$ không?

Đọc tiếp để phân biệt tập xác định, tập đang xét và điểm được phép dùng.

1.1. Quy tắc và tập xác định

Để xác định một hàm số, cần biết biến số được phép nhận những giá trị nào và quy tắc gán cho mỗi giá trị ấy một giá trị duy nhất của hàm số. Tập các giá trị mà biến số được phép nhận gọi là **tập xác định D của hàm số**.

Đọc đầy đủ dữ kiện trước khi tìm D

- Nếu để cho hàm số có tập xác định K , thì $D = K$. Công thức phải có nghĩa với mọi $x \in K$.
- Nếu chỉ cho công thức và **không chỉ rõ tập xác định**, ta mới theo quy ước lấy tất cả số thực làm biểu thức có nghĩa.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 10, tập hai, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 15, trang 6 (trang 7 của tệp PDF), phần định nghĩa và chú ý về trường hợp không chỉ rõ tập xác định.

1.2. Ví dụ 01 — Tập xác định và điểm đạt

Tính được $f(2)$ chưa chắc có điểm đạt.

Đề cho $f(x) = (x - 2)^2$ mà không giới hạn tập xác định, nên $D = \mathbb{R}$. Yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất trên $K = (2; 5]$ chỉ giới hạn các điểm được đưa vào so sánh.

Đối tượng cần đọc	Kết luận trong bài này
Tập xác định D	$\mathbb{R}$: công thức có nghĩa với mọi số thực và để không cho giới hạn khác.
Tập đang xét K	$(2; 5]$: chỉ so sánh giá trị tại các điểm thuộc tập này.
Đầu mút 2	$2 \in D$ nhưng $2 \notin K$. Giá trị $f(2) = 0$ có nghĩa; 2 không được dùng làm điểm đạt trên K .
Đầu mút 5	$5 \in K$. Giá trị $f(5) = 9$ được đưa vào so sánh.

Cần phân biệt ba việc: thay số vào biểu thức, tính giá trị hàm số và xét điểm đạt trên K .

Với f ở câu khởi động, cả phép tính $(2 - 2)^2 = 0$ và kí hiệu $f(2) = 0$ đều đúng. Điều bị bỏ sót là $2 \notin K$.

Nếu một đề khác cho hàm số g có tập xác định $(2; 5]$, với $g(x) = (x - 2)^2$, thì $g(2)$ không xác định. Phép thay 2 vào biểu thức vẫn tính được 0, nhưng không phải là giá trị của g tại 2. Cùng công thức chưa đủ để kết luận hai hàm số có cùng tập xác định.

Vì vậy, **D là tập xác định của hàm số đã cho; K là tập được yêu cầu xét.** Hai tập có thể trùng nhau. Nếu xét trên một phần của D thì phải có $K \subseteq D$. Không tự mặc định D lớn hơn K , cũng không tự đổi D của một hàm số đã được xác định rõ.

Trước mỗi bài, hãy tự hỏi: đề đang cho tập xác định của hàm số, hay đang yêu cầu so sánh các giá trị trên một tập được chỉ định? Đọc trọn yêu cầu rồi mới quyết định D và K .

2. So sánh và sự đạt được

Gợi mở 02 — So sánh chưa đủ để có giá trị lớn nhất

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Biết $f(x) \leq M$ với mọi $x \in K$ đã đủ để gọi M là giá trị lớn nhất trên K chưa?

Định nghĩa dưới đây còn yêu cầu giá trị ấy được đạt tại một điểm thuộc K .

2.1. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Cho hàm số f có tập xác định D . Với tập không rỗng $K \subseteq D$ (có thể $K = D$), số M là **giá trị lớn nhất** của f trên K khi:

Giá trị lớn nhất trên một tập

- $f(x) \leq M$ với mọi $x \in K$.
- Có ít nhất một điểm $x_0 \in K$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $\max_{x \in K} f(x) = M$.

Giá trị nhỏ nhất trên một tập

Số m là **giá trị nhỏ nhất** của f trên K khi:

1. $f(x) \geq m$ với mọi $x \in K$.
2. Có ít nhất một điểm $x_1 \in K$ sao cho $f(x_1) = m$.

Kí hiệu: $\min_{x \in K} f(x) = m$.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 2, trang 15 (trang 17 của tệp PDF), phần định nghĩa.

Tập được yêu cầu xét là K ; khi xét toàn bộ tập xác định thì $K = D$. Cả điều kiện so sánh và điều kiện đạt được đều phải dùng cùng tập K .

Hãy viết đủ: “**Giá trị lớn nhất bằng M , đạt tại $x = x_0$.**” Số M là giá trị; x_0 là điểm đạt giá trị của hàm số; $(x_0; M)$ là một điểm trên đồ thị. Một giá trị lớn nhất có thể đạt tại nhiều điểm.

2.2. Sự đạt được

Xét $f(x) = (x - 2)^2$ trên $K = (2; 5]$.

Nhiệm vụ 04 — Điểm bị loại và sự đạt được.

Không được lấy $x = 2$. Vậy 0 có thể là giá trị nhỏ nhất không? Nếu 0 không phải giá trị nhỏ nhất, liệu có một số dương nào nhỏ nhất?

Xem lời giải (trang 43)

2.3. Cận và giá trị đạt được

Nếu chỉ có $f(x) \leq M$ với mọi $x \in K$, ta mới có một **cận trên**. Nếu chỉ có $f(x) \geq m$, ta có một **cận dưới**. “Bị chặn trên”, “bị chặn dưới” nói về sự tồn tại của những cận như vậy; “bị chặn” nghĩa là có cả hai.

Ví dụ, trên $(0; 1)$, hàm số $f(x) = x$ có $0 < f(x) < 1$. Hàm số bị chặn nhưng không đạt 0 hoặc 1. Với mỗi $x \in (0; 1)$, điểm $\frac{x}{2}$ cho giá trị nhỏ hơn, còn điểm $\frac{x+1}{2}$ cho giá trị lớn hơn. Vì vậy hàm số không có cả giá trị nhỏ nhất lẫn lớn nhất trên khoảng này.

Không đạt một cận tùy ý chưa đủ để kết luận không có giá trị lớn nhất.

Hàm số hằng $f(x) = 3$ không đạt cận trên 10, nhưng có giá trị lớn nhất bằng 3. Muốn bác bỏ sự tồn tại, cần lập luận loại được mọi giá trị có thể là lớn nhất.

2.4. Cực trị và giá trị toàn tập

Nhắc lại cách nhận biết cực trị. Xét hàm số f liên tục trên một khoảng chứa x_0 . Hàm số đạt cực đại tại x_0 nếu, trong một khoảng đủ nhỏ quanh x_0 , giá trị $f(x_0)$ **lớn hơn** mọi giá trị $f(x)$ với $x \neq x_0$. Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 nếu giá trị $f(x_0)$ **nhỏ hơn** mọi giá trị như vậy. Việc so sánh xét các điểm ở cả hai phía của x_0 ; bằng nhau không thỏa điều kiện lớn hơn hoặc nhỏ hơn này.

Điều cần phân biệt	Cực đại, cực tiểu	Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên K
Phạm vi so sánh	So sánh với các điểm đủ gần ở cả hai phía; dùng bất đẳng thức nghiêm ngặt.	So sánh với mọi điểm thuộc K .
Giá trị ở vị trí khác	Giá trị cực đại có thể bị một giá trị ở xa vượt qua.	Giá trị lớn nhất không bị bất cứ giá trị nào trên K vượt qua.
Vai trò của đầu mút	Một đầu mút của tập xác định không có khoảng nhỏ quanh nó nằm trọn trong tập xác định, nên không thỏa điều kiện hai phía nêu trên.	Đầu mút thuộc K có thể là nơi đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Nếu điểm đó nằm bên trong D , phải xét hàm số ở cả hai phía mới kết luận về cực trị.

Một điểm cực trị thuộc K là một điểm cần xem xét khi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên K . Ngược lại, điểm đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất chưa chắc là điểm cực trị: giá trị ấy có thể đạt tại đầu mút, hoặc bằng các giá trị ở những điểm lân cận.

Nhiệm vụ 05 – Hàm hằng và cực trị

Cho hàm số $f(x) = 2$ có tập xác định $(0; 1)$. Hàm số có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất không? Có điểm cực đại hoặc cực tiểu không? Hãy giải thích bằng cách so sánh giá trị tại một điểm với các giá trị ở những điểm gần nó.

Xem lời giải (trang 43)

3. Tìm trên đoạn đóng

Gợi mở 03 — Danh sách điểm cần so sánh

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Khi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn, chỉ tìm nghiệm của đạo hàm có đủ không?

Hãy đối chiếu điều kiện tồn tại rồi lập đủ danh sách các điểm cần xét trong quy trình dưới đây.

3.1. Điều kiện tồn tại

Bảo đảm tồn tại

Nếu f liên tục trên đoạn $[a; b]$, với $a < b$, thì f có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Cần kiểm tra $[a; b] \subseteq D$ và tính liên tục trên toàn đoạn. Một hàm được cho bởi công thức đa thức trên cả đoạn thì liên tục trên đoạn ấy; với công thức phân thức phải kiểm tra mẫu khác 0 ở mọi điểm của đoạn. Liên tục ở đầu mút được xét từ phía bên trong đoạn.

Đây là **điều kiện đủ**. Nếu thiếu điều kiện, em chưa được dùng bảo đảm trên; em cũng chưa được kết luận rằng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất không tồn tại.

Nhiệm vụ 06 – Kiểm điều kiện liên tục

Hàm q có tập xác định $[0; 1]$, với $q(x) = x$ khi $0 \leq x < 1$ và $q(1) = 0$. Một bạn chỉ so sánh $q(0) = q(1) = 0$ rồi kết luận giá trị lớn nhất bằng 0. Bạn đã bỏ điều kiện nào?

Xem lời giải (trang 43)

3.2. So sánh các ứng viên

Giả sử f liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$ trừ nhiều nhất một số hữu hạn điểm, và chỉ có hữu hạn điểm bên trong đoạn thỏa $f'(x) = 0$.

1. **Lập danh sách điểm:** hai đầu mút a, b ; các điểm thuộc $(a; b)$ mà $f'(x) = 0$; các điểm thuộc $(a; b)$ mà hàm số có giá trị nhưng không có đạo hàm.
2. **Tính giá trị của f** tại tất cả các điểm trong danh sách.
3. **So sánh các giá trị**, rồi ghi giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và tất cả điểm đạt được tìm thấy.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 2, trang 18 (trang 20 của tệp PDF), phần quy trình và giả thiết.

Vì sao phải có ba nhóm điểm? Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đã được bảo đảm tồn tại. Điểm đạt có thể là đầu mút. Nếu nằm bên trong và hàm số có đạo hàm tại đó, đạo hàm phải bằng 0; nếu không có đạo hàm, điểm ấy cần được xét riêng.

Không cần tính đạo hàm tại đầu mút để đưa đầu mút vào danh sách. Khi phương trình $f'(x) = 0$ có vô số nghiệm, quy trình liệt kê hữu hạn này không áp dụng nguyên dạng. Chẳng hạn với hàm hằng, có thể kết luận ngay từ định nghĩa.

3.3. Ví dụ 02 – So sánh các ứng viên

Xét $a(x) = x^2 - 2x$ trên $[-1; 3]$. Hàm số là đa thức, liên tục trên đoạn; đạo hàm $a'(x) = 2x - 2$ tồn tại và chỉ bằng 0 tại $x = 1$ bên trong đoạn.

Danh sách cần xét gồm $-1, 1, 3$. Ta tính $a(-1) = 3, a(1) = -1, a(3) = 3$. Vì vậy giá trị nhỏ nhất là -1 tại $x = 1$; giá trị lớn nhất là 3, đạt tại **cả hai** điểm $x = -1$ và $x = 3$.

Kiểm tra trực tiếp: $a(x) = (x - 1)^2 - 1$ và $0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$ trên đoạn. Kết luận dựa vào giá trị của hàm số, không phải điểm nào có hoành độ lớn nhất. Ví dụ đã giải này dùng để học phương pháp, không tính là bài làm độc lập của em.

3.4. So sánh giá trị

Nhiệm vụ 07 — Lập đủ điểm cần so sánh.

Cho hàm số $p(x) = x^2 - 4x + 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của p trên đoạn $[-1; 4]$. Em sẽ đưa những điểm nào vào danh sách? Vì sao?

Xem lời giải (trang 44)

4. Các tập khác đoạn đóng

Gợi mở 04 — Đầu mút có được lấy không?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu đổi đoạn đóng thành khoảng hở, kết quả lớn nhất, nhỏ nhất có nhất thiết được giữ nguyên không?

Các ví dụ dưới đây giữ công thức nhưng đổi tập đang xét để kiểm riêng sự đạt được.

4.1. Thay tập đang xét

Hãy trở về hai điều kiện của định nghĩa. Bảng biến thiên hoặc đồ thị giúp thấy hướng thay đổi. Một giới hạn hữu hạn ở đầu mút hở không tự tạo ra giá trị của hàm số tại đầu mút đó. Muốn gọi một số là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trên K , vẫn phải tìm được điểm thuộc K tại đó hàm số đạt số ấy.

Ở bảng sau, cho rõ hàm số $F(x) = x$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Ta giữ nguyên hàm số F và lần lượt thay tập K được yêu cầu xét.

Tập K đang xét của F	Giá trị nhỏ nhất	Giá trị lớn nhất
Trên $[0; 1]$	0 tại $x = 0$	1 tại $x = 1$
Trên $[0; 1)$	0 tại $x = 0$	Không có
Trên $(0; 1]$	Không có	1 tại $x = 1$
Trên $(0; 1)$	Không có	Không có

Ví dụ, trên $K = [0; 1)$, mỗi điểm x luôn có một điểm $y = \frac{x+1}{2}$ thuộc cùng tập với $F(y) > F(x)$. Vì thế F không có giá trị lớn nhất trên K . Dù $F(1) = 1$ có nghĩa với hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$, điểm 1 không thuộc K và không có điểm nào khác trong K cho giá trị 1.

Trên một tập không bị chặn, không được suy ngay rằng hàm số không có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Chẳng hạn x^2 trên $\mathbb{R}$ vẫn có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Một điểm hở không loại luôn cả một giá trị.

Chẳng hạn, hàm số q có tập xác định $(-1; 1]$, với $q(x) = x^2$, không có giá trị $q(-1)$. Tuy nhiên, giá trị 1 vẫn được đạt tại $x = 1$ và là giá trị lớn nhất, vì $q(x) \leq 1$ trên toàn tập xác định. Cần kiểm tra mọi điểm có thể cho cùng tung độ, không chỉ đầu mút bị loại.

4.2. Tập nhiều thành phần

Xét trường hợp tập K gồm nhiều thành phần rời nhau.

Xét từng thành phần, ghi rõ các giá trị đạt được và các cận liên quan, rồi so sánh trên **toàn bộ** K . Một mũi tên chỉ cho biết biến thiên trên phần mà nó biểu diễn. Không nối qua chỗ bị loại để kết luận đơn điệu trên cả tập.

Một thành phần không có giá trị lớn nhất không có nghĩa cả tập cũng không có. Chẳng hạn với $f(x) = x$ trên $[0; 1) \cup [2; 3]$, thành phần đầu không có giá trị lớn nhất, nhưng toàn tập có giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 3$.

4.3. Chọn công cụ

- **Công thức:** dùng biến đổi, bất đẳng thức đơn giản hoặc đạo hàm; chọn cách làm ngắn mà đủ lập luận.
- **Bảng biến thiên:** đọc toàn bảng, tập đang xét, giá trị tại điểm và giới hạn. Không tự thêm dữ kiện đạo hàm nếu bảng không cho.
- **Đồ thị:** đọc nhãn, tập được biểu diễn, tung độ, điểm kín và điểm hở. Kiểm tra xem tung độ ở một điểm hở có được đạt tại điểm khác thuộc K hay không. Hình phác không cho phép đoán chính xác một giá trị chưa được ghi hoặc xác định.
- **Lời văn:** xác định đại lượng cần tìm, biến số, tập giá trị được phép và đơn vị.

5. Mô hình và ràng buộc

Gợi mở 05 — Giữ ràng buộc khi chọn điểm đạt

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu biến chỉ nhận giá trị nguyên, có thể lấy ngay điểm đạt của mô hình liên tục làm đáp án không? Phần này giúp em xác định đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, đồng thời xác định các giá trị mà biến số được phép nhận.

5.1. Đại lượng và ràng buộc

Trong gói này, công thức doanh thu và chi phí đã được cung cấp. Em cần lập đúng hàm lợi nhuận, xác định tập đang xét rồi tìm và diễn giải giá trị lớn nhất.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Lợi nhuận = doanh thu – tổng chi phí.

Nếu để cho **chi phí bình quân cho một sản phẩm** là $G(x)$, thì tổng chi phí là $C(x) = xG(x)$, không phải $G(x)$.

Nếu x là số sản phẩm thì chỉ nhận các giá trị nguyên được phép. Có thể xét thêm một hàm số cùng công thức với biến thực để tìm vùng cần kiểm tra. Nếu hàm số này tăng rồi giảm và hoành độ điểm cực đại nằm giữa hai số nguyên liên tiếp đều được phép chọn, hãy tính và so sánh giá trị hàm số tại hai số nguyên đó. Chọn phương án cho giá trị lớn hơn, không chọn chỉ vì nó gần hoành độ cực đại hơn.

Nhiệm vụ 08 — Chọn giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện

Một hàm P tăng đến $x = 2,2$ rồi giảm. Chỉ được chọn $x = 2$ hoặc $x = 3$, với $P(2) = 8$ và $P(3) = 9,2$. Chọn số nguyên gần 2,2 nhất có cho giá trị lớn nhất không?

Xem lời giải (trang 44)

5.2. Phạm vi vận dụng

Chỗ dừng của gói.

Chưa tự xây dựng mô hình hình học nhiều bước, chưa xử lí nhiều ràng buộc hoặc phân loại tham số. Những việc đó dành cho gói bài toán tối ưu và phần vận dụng tiếp theo.

Khép lại bài học

Gói về tiệm cận sẽ làm rõ hơn hành vi của đồ thị khi biến tiến đến một điểm bị loại hoặc ra vô cực. Gói bài toán tối ưu sẽ yêu cầu tự chọn biến, xây dựng hàm mục tiêu và xác định các ràng buộc. Nên em mang theo là: **xét đúng tập, kiểm tra sự đạt được và giải thích kết quả trong bối cảnh.**

Luyện tập

Luyện tập gồm ba chặng, mỗi chặng có một Điểm dừng. Tự làm theo thứ tự nhiệm vụ trong từng chặng trước khi đối chiếu. Với mỗi bài, ghi tập đang xét, căn cứ kết luận, giá trị và mọi điểm đạt. Hai bài chuyển giao lượng giác, mũ–lôgarit thuộc nhánh riêng sau phần cốt lõi; thiếu nền của nhánh ấy không làm mất kết quả cốt lõi đã có bằng chứng.

Ba chặng Luyện tập

Chặng	Trọng tâm luyện tập	Nhiệm vụ và Điểm dừng
Đúng đối tượng và tìm đủ trên đoạn	Phân biệt tập xác định với tập đang xét; tìm đủ ứng viên và mọi điểm đạt	Bắt đầu từ Nhiệm vụ 09 (trang 15); Điểm dừng 01 (trang 16)
Sự tồn tại trên tập khác đoạn đóng	Xét đủ thành phần; phân biệt cận với giá trị được đạt; giải thích tồn tại hoặc không tồn tại	Bắt đầu từ Nhiệm vụ 12 (trang 16); Điểm dừng 02 (trang 18)
Chọn mô hình và xử lí ràng buộc	Lập đúng hàm mục tiêu, giữ đơn vị và kiểm tra ràng buộc thực hoặc nguyên	Bắt đầu từ Nhiệm vụ 16 (trang 18); Điểm dừng 03 (trang 19)

Với mỗi bài, ghi tập đang xét, căn cứ kết luận, giá trị và mọi điểm đạt. Chọn chặng cần luyện theo tiêu chí ở Điểm dừng. Chỉ mở gợi ý khi đã thử nhưng chưa tìm được hướng; chỉ mở lời giải sau khi tự làm để đối chiếu.

Chặng 1 – Đúng đối tượng và tìm đủ trên đoạn

Khi cần xem lại: Đối tượng và tập đang xét (trang 7), Giá trị và sự đạt được (trang 8), Quy trình trên đoạn (trang 10). Chỉ xem lại đúng phần đang vướng, rồi trở về nhiệm vụ đang làm.

Bằng chứng cần giữ: tập xác định và tập đang xét; danh sách ứng viên đủ đầu mút, nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 và điểm không có đạo hàm; giá trị cùng mọi điểm đạt. Tự làm ba bài sau trước khi mở lời giải.

Nhiệm vụ 09 – Cực đại có phải lớn nhất?

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Thực hiện các yêu cầu sau trên đoạn $[-2; 3]$.

1. Xác định các cực trị bên trong đoạn.
2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên đoạn, ghi mọi điểm đạt.
3. Bác bỏ nhận xét: “Giá trị cực đại bằng 2 nên giá trị lớn nhất bằng 2.”

Cần một gợi ý?

Lập đủ danh sách hai đầu mút và các nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 thuộc bên trong đoạn. Đừng chọn chỉ một điểm nếu nhiều điểm cho cùng giá trị.

Xem lời giải (trang 44)

Nhiệm vụ 10 – Một điểm không có đạo hàm

Cho hàm số $g(x) = |x + 2|$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của g trên đoạn $[-4; 1]$. Một bạn không tìm thấy nghiệm $g'(x) = 0$ nên chỉ so sánh hai đầu mút. Hãy chỉ ra điểm bị bỏ và kiểm tra kết quả bằng ý nghĩa khoảng cách.

Cần một gợi ý?

Điểm đổi công thức của dấu giá trị tuyệt đối có thuộc đoạn không? Hàm số có giá trị và có đạo hàm tại đó không?

Xem lời giải (trang 44)

Nhiệm vụ 11 – Chọn cách so sánh trực tiếp

Cho $s(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$. Xác định D , rồi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của s trên $K = [0; 3]$. Có cần tính đạo hàm không? Ghi tất cả điểm đạt thuộc K .

Xem lời giải (trang 45)

Điểm dừng 01

- Giữ nguyên bài làm Nhiệm vụ 09 (trang 15), Nhiệm vụ 10 (trang 15) và Nhiệm vụ 11 (trang 16), ghi mức hỗ trợ của từng bài.
- Đối chiếu lời giải: nhiệm vụ 09 không lấy cực đại thay cho lớn nhất, giữ đủ mọi điểm đạt; nhiệm vụ 10 xét điểm gãy; nhiệm vụ 11 phân biệt tập xác định với tập đang xét và chọn so sánh trực tiếp.
- Ghi riêng mục tiêu đã có bằng chứng, còn sai và chưa đủ bằng chứng.
- Quên ứng viên hoặc nhầm toàn đoạn đi Nhiệm vụ 40 (trang 36); nhầm tập đi Nhiệm vụ 41 (trang 36); bỏ điểm gãy đi Nhiệm vụ 42 (trang 36).
- Thiếu tiên quyết đi Tập xác định (trang 26), Đạo hàm đa thức (trang 26), Liên tục và điểm ghép (trang 27) hoặc Đọc nhãn đồ thị (trang 28) theo đúng nguyên nhân. Làm câu mới chưa gặp trước đó trước khi xác nhận; câu đã xem lời giải chỉ nối lại việc học.
- Có đủ bằng chứng các điều kiện trên thì sang Chặng 2 (trang 16); chưa đủ thì xử lý đúng phần còn vướng, không dùng tổng số câu đúng để quyết định. Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; bài làm và kết quả đối chiếu có thể giữ ngay trên giấy đang dùng.

Chặng 2 – Sự tồn tại trên tập khác đoạn đóng

Khi cần xem lại: Đối tập đang xét (trang 12). **Bằng chứng cần giữ:** xét đủ từng thành phần; phân biệt cận với giá trị được đạt; chứng minh trường hợp không tồn tại thay vì chỉ chỉ vào điểm hở hoặc vô cực. Tự làm bốn bài sau.

Nhiệm vụ 12 – Tập không bị chặn, hàm vẫn bị chặn

Xét $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ trên $\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất. Hàm số có giá trị nhỏ nhất không? Không dùng riêng câu “vì x tiến ra vô cực” thay cho lập luận về sự đạt được.

Cần một gợi ý?

Muốn chứng minh không có giá trị nhỏ nhất, thử tạo một điểm mới cho mẫu số lớn hơn mẫu số tại điểm đang xét.

Xem lời giải (trang 45)

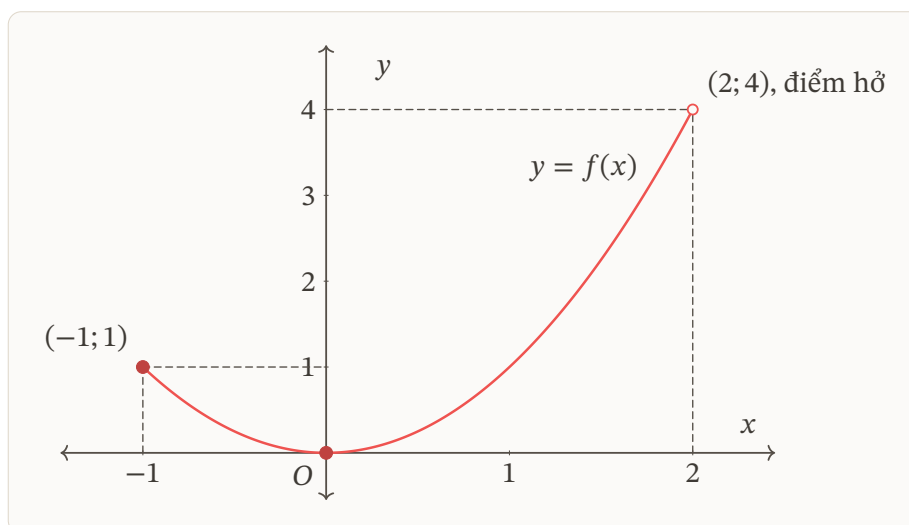
Nhiệm vụ 13 – Hai thành phần đều cần được xét

Cho hàm số $f(x) = x$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f trên $K = [-2; -1] \cup (0; 1)$, nếu có. Giải thích vì sao chỉ xét đoạn $[-2; -1]$ là chưa đủ.

Xem lời giải (trang 45)

Nhiệm vụ 14 – Đọc giá trị và sự đạt được trên đồ thị

Cho hàm số f có tập xác định $\mathbb{R}$. Hình dưới chỉ biểu diễn phần đồ thị ứng với $K = [-1; 2)$. Hãy đọc hình để trả lời hai câu đầu, rồi mới mở công thức để kiểm tra.



Hình 01 — Đồ thị của f trên $K = [-1; 2)$. Điểm kín thuộc đồ thị đang xét; điểm hở chỉ vị trí bị loại.

1. Tìm giá trị nhỏ nhất trên K và tọa độ điểm trên đồ thị tương ứng.
2. Có giá trị lớn nhất trên K không? Giải thích vai trò của điểm hở $(2; 4)$.
3. Sau khi trả lời từ hình, mở công thức và kiểm tra lại kết quả.

Xem công thức để kiểm tra (trang 45)

Xem lời giải (trang 45)

Nhiệm vụ 15 – Điểm nào được dùng để so sánh?

Cho $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+1}$. Xác định tập xác định D , rồi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $K = (-1; +\infty)$, nếu có. Dùng đạo hàm và kiểm tra kết quả bằng một cách khác. Khi loại một nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0, hãy nói rõ điểm đó nằm ngoài D hay chỉ nằm ngoài K .

Xem lời giải (trang 46)

Điểm dừng 02

- Giữ bài làm Nhiệm vụ 12 (trang 16), Nhiệm vụ 13 (trang 17), Nhiệm vụ 14 (trang 17), Nhiệm vụ 15 (trang 17) và mức hỗ trợ.
- Đối chiếu: tập không bị chặn chưa quyết định kết quả; mọi thành phần phải được xét; điểm hỗ không cho giá trị đạt tại điểm ấy; nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 chỉ được giữ khi thuộc tập đang xét.
- Ghi mục tiêu đã đạt, còn sai, chưa đủ bằng chứng; không chấm đạt từ đáp số đúng do nhớ.
- Nhắm tập/cận đi Nhiệm vụ 41 (trang 36); bỏ thành phần đi Nhiệm vụ 43 (trang 36); nhắm nhãn đi Xác nhận nền đọc đồ thị (trang 28) nếu chưa gặp trước đó; dùng định lý sai điều kiện đi Nhiệm vụ 45 (trang 36).
- Thiếu nền chọn Tập xác định (trang 26), Liên tục (trang 27), Cận và sự đạt được (trang 28) hoặc Đồ thị (trang 28). Một nhiệm vụ chưa gặp trước đó, làm độc lập và phù hợp với lỗi đang xét đủ để xác nhận phần đó; không bắt buộc làm thêm một nhiệm vụ chỉ để đủ lượt. Không dùng bài cũ đã xem lời giải làm kết quả tự làm một bài mới.
- Sau hỗ trợ, quay về điểm này. Khi có lập luận độc lập cho các mục tiêu trên, tiếp tục Chặng 3 (trang 18). Nếu còn vướng, xử lý phần phụ thuộc; em vẫn có thể học mục tiêu khác độc lập hoặc bắt đầu Kiểm tra khi đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin. Ghi Nhật ký (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; bài làm và kết quả đối chiếu có thể giữ ngay trên giấy đang dùng.

Chặng 3 – Chọn mô hình và xử lý ràng buộc

Khi cần xem lại: Bài toán có lời văn (trang 13). **Bảng chứng cần giữ:** hàm mục tiêu đúng, tập giá trị thực hoặc nguyên đúng, cách chọn ứng viên và kết luận có đơn vị. Tự làm hai bài sau.

Nhiệm vụ 16 – Từ doanh thu đến lợi nhuận

Một cơ sở điều chỉnh lượng sản phẩm x (tấn), với $1 \leq x \leq 10$; x nhận giá trị thực. Doanh thu và tổng chi phí, cùng tính bằng triệu đồng, theo mô hình:

$$R(x) = 30x,$$

$$C(x) = \frac{x^3}{4} + 3x + 12.$$

Lập hàm lợi nhuận và tìm lượng sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất theo mô hình. Ghi cả lợi nhuận và đơn vị. Đối chiếu kết quả bằng biến đổi đại số.

Cần một gợi ý?

Đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất là lợi nhuận. Sau khi lập hàm lợi nhuận, tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn đã cho.

Xem lời giải (trang 46)

Nhiệm vụ 17 – Chi phí bình quân và ràng buộc nguyên

Một cơ sở có thể sản xuất x sản phẩm trong một ca, với

$$x \in \{1; 2; \dots; 12\}.$$

Doanh thu là $R(x) = 40x$ nghìn đồng. Chi phí bình quân cho một sản phẩm là

$$G(x) = 2x + 9 + \frac{30}{x}$$

nghìn đồng trên một sản phẩm.

1. Lập tổng chi phí và hàm lợi nhuận.
2. Tìm số sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất.
3. Ghi mức lợi nhuận lớn nhất và đơn vị.
4. Giải thích vì sao không được lấy số nguyên bằng cách làm tròn máy móc điểm cực đại của hàm phụ biến thực.

Xem lời giải (trang 46)

Điểm dừng 03

1. Giữ bài làm Nhiệm vụ 16 (trang 18), Nhiệm vụ 17 (trang 19) cùng mức hỗ trợ.
2. Đối chiếu: lập lợi nhuận từ doanh thu và tổng chi phí; đổi chi phí bình quân thành tổng chi phí; tối ưu trên đúng tập; so sánh ứng viên nguyên, không chỉ làm tròn; kết luận đủ lượng, giá trị, đơn vị.
3. Tách lỗi lập mô hình khỏi lỗi tối ưu và lỗi đơn vị; ghi rõ phần chưa đủ bằng chứng.
4. Sai mô hình hoặc ràng buộc đi Nhiệm vụ 44 (trang 36).
5. Thiếu nền chọn Hàm mục tiêu và đơn vị (trang 30) hoặc Ứng viên nguyên (trang 30). Sau nền, tự làm nhiệm vụ mới chưa gặp trước đó rồi quay lại điểm này.
6. Khi đã chuẩn bị kĩ hoặc đủ tự tin, em có thể bắt đầu Kiểm tra (trang 21). Nếu còn vướng, xem lại đúng phần Bài học, Ôn nền hoặc Sửa lỗi trước; quyết định làm Kiểm tra không có nghĩa là đã đạt mục tiêu. Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; bài làm và kết quả đối chiếu có thể giữ ngay trên giấy đang dùng.

Chuyển giao có điều kiện

Chỉ mở khi phần cốt lõi đã vững và em có nền đạo hàm tương ứng. Hai bài dưới kiểm tra khả năng chuyển giao sang họ hàm khác; đây không phải chặng cốt lõi thứ tư.

Nhiệm vụ 18 – Hàm lượng giác

Làm ở một lượt riêng, chưa xem lời giải. Cần nêu điều kiện, xét đủ điểm và giải thích kết quả. Nếu chưa làm được, ôn cách tính và xét dấu đạo hàm lượng giác rồi thử lại bằng Nhiệm vụ 46 (trang 37).

Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x - x$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Góc đo bằng radian. Hãy dùng dấu đạo hàm để giải thích điểm bên trong nào cần xét.

Xem lời giải (trang 47)

Nhiệm vụ 19 – Hàm mũ và lôgarit

Chỉ làm khi đã có nền đạo hàm tương ứng

Cho hai hàm số $u(x) = x^2 e^{-x}$ và $v(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: (a) của u trên đoạn $[0; 4]$; (b) của v trên đoạn $[1; e^2]$.

Xem lời giải (trang 47)

Điểm dừng 04

Giữ kết quả từng họ hàm và mức hỗ trợ riêng. Đạt khi điều kiện, đạo hàm, danh sách ứng viên, giá trị và điểm đạt đều đúng. Thiếu nền lượng giác dùng Đạo hàm lượng giác (trang 30); thiếu nền mũ-lôgarit dùng Đạo hàm mũ và lôgarit (trang 31). Sau hỗ trợ chọn Nhiệm vụ 46 (trang 37) chưa gặp trước đó cho lượng giác hoặc Nhiệm vụ 47 (trang 37) chưa gặp trước đó cho lôgarit, rồi quay về điểm này. Nhiệm vụ 47 không xác nhận nhánh mũ; nếu bài mũ đã gặp trước đó và chưa có bằng chứng phù hợp, ghi nhánh mũ chưa xác nhận, ôn đúng nền rồi tiếp tục phần không phụ thuộc.

Nếu đã biết lời giải của cả bài này và bài thử lại, em vẫn có thể dùng chúng để ôn cách làm. Tuy nhiên, cần một bài khác phù hợp để kiểm tra khả năng tự giải; hãy ghi rõ phần cần được kiểm tra thêm và xem lại cách lập danh sách điểm cần xét (trang 10) hoặc thẻ Ôn nền tương ứng. Việc chưa làm được nhánh lượng giác hoặc mũ-lôgarit không làm mất những kết quả đã đạt ở phần cốt lõi.

Tiếp tục lịch Ôn lại (trang 24) của phần cốt lõi. Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; không cần mở Nhật kí chỉ để đi tiếp.

Kiểm tra

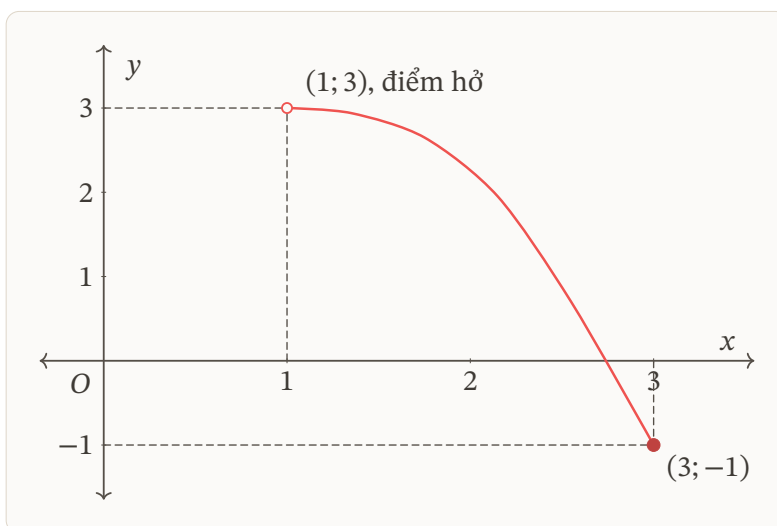
Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, em có thể làm Kiểm tra. Làm trọn lượt, không chia thành nhiều đợt.

Trong lúc Kiểm tra, phải tự lực hoàn toàn: đóng Bài học, Luyện tập, Ôn nền, Lời giải và Sửa lỗi. Nếu cần hỗ trợ, kết thúc lượt kiểm tra và giữ bài làm ban đầu trước; ghi riêng kết quả sau hỗ trợ, không tính là bài kiểm tra độc lập ban đầu.

Đáp số đúng cần đi cùng tập đang xét, lí do tồn tại hoặc không tồn tại, và điểm đạt nếu có. Đây là kiểm tra mục tiêu của gói, không phải để mô phỏng thi.

Nhiệm vụ 20 – Đọc đồ thị trên tập được chỉ định

Hàm số g có tập xác định $\mathbb{R}$ và $g(1) = 3$. Hình dưới chỉ biểu diễn phần đồ thị ứng với $K = (1; 3]$.



Hình 02 — Phần đồ thị của g trên $K = (1; 3]$; các tọa độ được ghi chính xác và hàm nghịch biến trên K .

Từ hình, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của g trên K , nếu có. Một bạn nói: “ $g(1) = 3$ nên giá trị lớn nhất trên K bằng 3.” Hãy chỉ ra chỗ sai và giải thích ý nghĩa của điểm hở $(1; 3)$.

Xem lời giải (trang 48)

Nhiệm vụ 21 – Có thể đạt tại nhiều điểm

Cho hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dùng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của h trên đoạn $[-1; 3]$; ghi tất cả điểm đạt trên đoạn này. Kiểm tra bằng dấu của $h(x) - 1$ và $h(x) + 3$.

Xem lời giải (trang 48)

Nhiệm vụ 22 – Đọc toàn bảng

Hàm số f có tập xác định $K = [-3; -1] \cup (0; 2]$ và liên tục trên từng thành phần của K . Chiều biến thiên và các giá trị được cho trong bảng. Số 0 ở hàng $f(x)$ là giới hạn khi x tiến đến 0 từ bên phải, không phải giá trị $f(0)$, vì 0 không thuộc tập xác định.

x	-3		-1		0		2
$f(x)$	5	$\searrow$	2	$\parallel$	0	$\nearrow$	4

Bảng biến thiên trên tập gồm đoạn từ -3 đến -1 và khoảng nửa kín từ 0 đến 2; số 0 ở hàng giá trị hàm số là giới hạn bên phải.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có. Giải thích vì sao chỉ lấy số nhỏ nhất trong các số ghi ở bảng có thể sai.

Thêm một tập đang xét: Với $h(x) = (x + 1)^2$, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $(-\infty; 0]$, nếu có. Giải thích vì sao tập không bị chặn chưa quyết định câu trả lời.

Xem lời giải (trang 48)

Nhiệm vụ 23 – Biến nhận giá trị nguyên

Một xưởng làm x sản phẩm, $x \in \{1; 2; \dots; 20\}$. Doanh thu là $R(x) = 72x$ nghìn đồng. Chi phí bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = 2x + 10 + \frac{50}{x}$ nghìn đồng/sản phẩm.

Lập hàm lợi nhuận; xác định số sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất và mức lợi nhuận đó. Giải thích cách xử lý ràng buộc x nguyên.

Xem lời giải (trang 48)

Nhiệm vụ 24 – Phản biện lời giải dùng đạo hàm

Cho hàm số $u(x) = 2 - |x - 1|$. Khi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của u trên đoạn $[-2; 3]$, một bạn viết: “Phương trình $u'(x) = 0$ không có nghiệm; so sánh $u(-2) = -1$ và $u(3) = 0$, nên giá trị lớn nhất bằng 0.” Hãy chỉ ra bước sai và giải lại.

Xem lời giải (trang 49)

Điểm dừng 05

- Giữ năm bài làm ban đầu; chỉ đối chiếu sau khi kết thúc lượt kiểm tra. Ghi riêng bài tự lực và kết quả sau hỗ trợ.
- Đọc kết quả (trang 23) theo mục tiêu: Nhiệm vụ 20 kiểm tập và sự đạt được; Nhiệm vụ 21, 24 kiểm danh sách ứng viên; Nhiệm vụ 22 kiểm toàn tập và tồn tại; Nhiệm vụ 23 kiểm mô hình, số nguyên và đơn vị.
- Ghi mục tiêu đã đạt, còn sai, chưa đủ bằng chứng; không dùng tổng số câu đúng để che lỗi thiết yếu.
- Nếu phát hiện lỗi, chọn đúng nhiệm vụ trong Sửa lỗi sau Kiểm tra (trang 37) theo biểu hiện thực tế; nếu thiếu tiên quyết thì dừng Ôn nền (trang 26) đúng phần trước.

5. Khi cần xác nhận sau sửa, tự làm bài phù hợp chưa gặp trước đó, đối chiếu tiêu chí rồi quay về điểm này. Không lấy bài Kiểm tra đã xem lời giải làm bằng chứng mới. Nếu đã đủ tiêu chí, giữ kết quả; không cần làm thêm bài Sửa lỗi.
6. Chỉ lên lịch Ôn lại (trang 24) khi mục tiêu cốt lõi có kết quả tự làm và lỗi cản trở việc học tiếp đã được xử lý. Nhánh Chuyển giao (trang 20) được ghi riêng. Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; giữ riêng bài làm ban đầu và kết quả sau hỗ trợ trên giấy đang dùng.

Đọc kết quả

Mục tiêu cần kiểm	Bài làm cần đối chiếu	Biểu hiện cần có
Đọc đúng đối tượng	Nhiệm vụ 20 (trang 21): xác định D, K và ý nghĩa của giá trị tại mốc	Phân biệt điểm của tập xác định với điểm được dùng để so sánh trên K
Kiểm tra hai điều kiện	Nhiệm vụ 20 (trang 21): so sánh và sự đạt được	Không đồng nhất cận với giá trị được đạt trên tập đang xét
Tìm trên đoạn đóng	Nhiệm vụ 21 (trang 21), 24 (trang 22): ứng viên và phép kiểm tra độc lập	Xét đủ đầu mút, điểm dừng và điểm không có đạo hàm; ghi mọi điểm đạt
Giải thích sự tồn tại	Nhiệm vụ 20 (trang 21), cả hai ý của 22 (trang 21)	Xét toàn tập; giải thích tồn tại hoặc không tồn tại thay vì chỉ ghi đáp số
Mô hình và ràng buộc	Nhiệm vụ 23 (trang 22): hàm lợi nhuận, số nguyên và đơn vị	Giữ ràng buộc của biến; so sánh ứng viên được phép và diễn giải kết quả

Khả năng chuyển giao được ghi riêng từ nhánh Chuyển giao (trang 20), không suy ra từ kết quả cốt lõi. Mục tiêu còn vướng thì chọn đúng Sửa lỗi sau Kiểm tra (trang 37) hoặc Ôn nền (trang 26), chỉ sau khi lượt kiểm tra đã kết thúc. Giữ bài làm ban đầu riêng; nếu hết câu phù hợp chưa gặp trước đó, ghi “chưa xác nhận” và trở về Điểm dừng 05 (trang 22), không dùng tổng số câu đúng để che lỗi thiết yếu.

Ôn lại

Đến mỗi lượt, đóng tài liệu và tự nhắc: **Đang xét trên tập nào? Đã so sánh với mọi giá trị chưa? Giá trị kết luận có được đạt không?**

Chọn ngày quay lại và ghi nhiệm vụ cần làm. Đến buổi ôn, đóng tài liệu rồi tự giải bài chưa xem lời giải. Sau khi đối chiếu, ghi kết quả và lỗi còn lặp. Đưa mục tiêu chưa vững vào lượt gần nhất; chỉ giãn lịch của mục tiêu đã tự làm đúng và giải thích được sau khoảng nghỉ, vẫn giữ lịch cho phần còn vướng.

Các mốc tính từ ngày hoàn tất lượt chính. Ghi ngày gốc để xác định ngày hẹn cụ thể. Có thể học gói tiếp theo phù hợp trong khi vẫn giữ lịch Ôn lại. Nếu nhiệm vụ đã gặp trước đó đáp án, không dùng lại để chứng nhận một kết quả độc lập mới.

Thời điểm ôn	Nhiệm vụ cần tự làm	Điểm dừng
Sau khoảng 2–3 ngày	Nhiệm vụ 25 (trang 24)	Điểm dừng 06 (trang 24)
Sau khoảng 7 ngày	Nhiệm vụ 26 (trang 25)	Điểm dừng 07 (trang 25)
Sau khoảng 3–4 tuần	Nhiệm vụ 27 (trang 25)	Điểm dừng 08 (trang 25)

Nhiệm vụ 25 – Tập xác định và sự đạt được

Mục tiêu: phân biệt tập xác định, tập đang xét, cận và giá trị đạt được. **Điểm dừng:** Điểm dừng 06 (trang 24). **Lỗi cần quan sát:** dùng điểm bị loại hoặc gọi cận là giá trị nhỏ nhất.

Thời điểm gợi ý: sau 2–3 ngày tính từ ngày đủ điều kiện chuyển sang gói tiếp theo. Đóng tài liệu trước khi làm; giữ riêng bài làm ban đầu và mức hỗ trợ.

Cho f có tập xác định $D = (-1; 2]$, $f(x) = x$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có; phân biệt phép thay $x = -1$ vào biểu thức với kí hiệu $f(-1)$.

Xem lời giải (trang 49)

Điểm dừng 06

Đạt khi xác định đúng tập, không dùng điểm bị loại, ghi đúng giá trị lớn nhất cùng điểm đạt và bác bỏ mọi ứng viên nhỏ nhất bằng lập luận. Đây chỉ là phép kiểm các mục tiêu vừa nêu, không xác nhận toàn bộ gói.

Nếu còn nhầm tập, dùng Tập xác định (trang 26); nếu nhầm cận với giá trị, dùng Cận và sự đạt được (trang 28). Sau đó chọn đúng bài trong Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 39), làm độc lập nếu bài chưa gặp trước đó rồi quay về điểm này. Đạt thì giữ lịch Nhiệm vụ 26 (trang 25). Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; bài làm và kết quả đối chiếu có thể giữ ngay trên giấy đang dùng.

Nhiệm vụ 26 – Một tập không bị chặn

Mục tiêu: chứng minh so sánh trên toàn tập và kiểm tra sự đạt được, không suy tồn tại chỉ từ hình dạng tập. **Điểm dừng:** Điểm dừng 07 (trang 25). **Lỗi cần quan sát:** coi cận dưới là giá trị nhỏ nhất hoặc thấy tập không bị chặn rồi kết luận ngay.

Thời điểm gợi ý: sau 7 ngày tính từ ngày đủ điều kiện chuyển sang gói tiếp theo. Không xem lại đáp án của lượt trước để thay cho tự làm lượt này.

Với $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$ trên $\mathbb{R}$, xác định các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có. Kiểm tra bằng bất đẳng thức. Xem lời giải (trang 49)

Điểm dừng 07

Đạt khi chứng minh được giá trị lớn nhất, điểm đạt và việc không có giá trị nhỏ nhất; không kết luận chỉ từ việc tập không bị chặn. Nếu sai, đi Cận và sự đạt được (trang 28) hoặc Điều kiện tồn tại (trang 10) theo nguyên nhân, rồi Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 39). Quay về đúng điểm này, không quay mặt định về lượt 1. Đạt thì giữ lịch Nhiệm vụ 27 (trang 25). Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; bài làm và kết quả đối chiếu có thể giữ ngay trên giấy đang dùng.

Nhiệm vụ 27 – Chọn đại lượng trong bối cảnh

Mục tiêu: chọn đúng đại lượng cần tối ưu, tìm đủ điểm và ghi đơn vị trong bối cảnh chuyển động.

Điểm dừng: Điểm dừng 08 (trang 25). **Lỗi cần quan sát:** tối ưu quãng đường thay tốc độ, bỏ điểm bên trong hoặc thiếu đơn vị.

Thời điểm gợi ý: sau 3–4 tuần tính từ ngày đủ điều kiện chuyển sang gói tiếp theo. Đóng tài liệu trước khi làm.

Một vật chuyển động thẳng có tọa độ $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$ (m), với $0 \leq t \leq 4$ và t tính bằng giây. Trong khoảng thời gian từ $t = 1$ đến $t = 3$, tìm thời điểm vật chuyển động chậm nhất và nhanh nhất; ghi tốc độ tương ứng. Tự chọn đại lượng và công cụ cần dùng.

Xem lời giải (trang 49)

Điểm dừng 08

Đạt khi chọn tốc độ thay vì tọa độ, xét đúng đoạn thời gian, so sánh đủ ứng viên và kết luận đủ thời điểm, tốc độ, đơn vị. Sai mô hình đi Chọn hàm mục tiêu và đơn vị (trang 30); sai danh sách ứng viên quay về Quy trình trên đoạn (trang 10). Nếu có lỗi, dùng Sửa lỗi sau Ôn lại (trang 39) theo lỗi thực tế rồi quay về điểm này. Nếu đã đạt, giữ kết quả; không cần làm thêm bài Sửa lỗi.

Nếu lỗi lặp lại, hẹn kiểm lại nội dung ấy sớm hơn. Nếu sau một khoảng nghỉ em vẫn tự làm đúng một bài chưa gặp trước đó và giải thích được cách làm, có thể hẹn lượt tiếp theo xa hơn. Ba bài Ôn lại chỉ kiểm tra những nội dung có trong đề, chưa đủ để kết luận em nhớ toàn bộ kiến thức của học liệu. Ghi Nhật kí (trang 41) khi cần lưu quyết định, nơi tiếp tục hoặc kết thúc buổi học; bài làm và kết quả đối chiếu có thể giữ ngay trên giấy đang dùng.

Ôn nền

Chỉ ôn phần gây vướng. Thẻ dùng chung cung cấp nhớ lại, ví dụ và tự kiểm tra mới; các câu bổ sung dưới đây kiểm đúng tình huống về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Làm độc lập trước khi mở đáp án. Đúng bài đã gặp trước đó chỉ nối lại việc học, không xác nhận mới.

Tập xác định và khoảng xét

Dùng khi: em chọn một điểm bị loại, xét một khoảng đi qua điểm không thuộc tập xác định hoặc nhằm phép thay vào biểu thức với giá trị của hàm đã cho.

Nhớ lại. Với biểu thức phân thức, mẫu phải khác 0. Nếu đề cho thêm tập xác định, phải giữ điều kiện đó ngay cả khi biểu thức rút gọn tính được tại một điểm đã bị loại. Muốn dùng định lí trên một khoảng, toàn bộ khoảng phải thuộc tập xác định và thỏa các giả thiết tương ứng.

Ví dụ hướng dẫn. $a(x) = \frac{1}{x+1}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Khoảng $(-2; 0)$ chứa -1 , nên không thể dùng định lí dấu đạo hàm cho a trên cả khoảng đó.

Tự kiểm tra mới. Cho $u(x) = (x - 4)^2 + 2$ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Tính biểu thức tại 4 có làm cho $u(4)$ tồn tại không? Có được áp dụng định lí trên $(3; 5)$ không? Khi phác đồ thị, điểm $(4; 2)$ là kín hay hở?

Đáp án và tiêu chí

$u(4)$ không tồn tại vì $4 \notin D$; không dùng định lí trên cả $(3; 5)$; điểm $(4; 2)$ hở. Đạt khi cả ba kết luận đi kèm lí do về tập xác định, không chỉ dựa vào hình dạng parabol.

Quay về: Quay lại câu Khởi động nếu em mở thẻ từ câu ấy; nếu đang làm một bài khác, trở lại bước tìm tập xác định của bài đó. Em có thể làm lại bài đã xem lời giải để hiểu cách làm, nhưng lần làm lại chưa cho biết em tự giải được một bài mới.

Xác nhận nền · Tập xác định

Nhiệm vụ 29 – Hai hàm cùng công thức

$a(x) = (x + 3)^2$ với $D_a = \mathbb{R}$; $b(x) = (x + 3)^2$ với $D_b = (-3; 0]$. Phân biệt phép thay $x = -3$ vào biểu thức, $a(-3)$ và $b(-3)$. Khi tìm giá trị nhỏ nhất của a trên $K = (-3; 0]$, có được dùng $x = -3$ không?

Đối chiếu hai hàm cùng công thức

Biểu thức tại -3 bằng 0 và $a(-3) = 0$ có nghĩa; $b(-3)$ không xác định. Điểm -3 cũng không thuộc K , nên không dùng làm điểm đạt khi xét a trên K . Đạt khi phân biệt đủ biểu thức, tập xác định và tập đang xét.

Đạo hàm đa thức

Dùng khi: em tính sai đạo hàm ở bước đầu của chuỗi biểu diễn.

Nhớ lại. Với số nguyên dương n , đạo hàm của x^n là nx^{n-1} ; đạo hàm của hằng số bằng 0; lấy đạo hàm từng hạng tử và giữ hệ số. Với đa thức, tập xác định và tập có đạo hàm đều là $\mathbb{R}$.

Ví dụ hướng dẫn. Với $a(x) = 2x^3 - x + 5$, ta có $a'(x) = 6x^2 - 1$. Số 5 biến mất vì là hằng số; hệ số 2 được nhân với 3.

Tự kiểm tra mới. Cho $u(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$. Tính và phân tích $u'(x)$ thành nhân tử; nêu các nghiệm của đạo hàm.

Đáp án và tiêu chí

$$u'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x + 4)(x - 2);$$

nghiệm là $-4, 2$. Đặt khi đạo hàm đúng, nhân tử đúng và không gọi hai nghiệm là cực trị trước khi xét dấu.

Quay về: bước đạo hàm của bài đang dừng. Thử không dạy đạo hàm thương, lượng giác, mũ hoặc lôgarit; bài dùng các loại đó phải gọi tài nguyên phù hợp hơn.

Liên tục và đạo hàm tại điểm ghép

Dùng khi: em nhìn đạo hàm hai phía rồi bỏ qua giá trị ở điểm ghép hoặc nhầm liên tục với có đạo hàm.

Nhớ lại. Kiểm tra liên tục tại một điểm bằng giá trị hàm và hai giới hạn một phía. Muốn kiểm tra đạo hàm tại điểm ghép, dùng các thương sai phân một phía dựa trên đúng giá trị hàm ở điểm đó. Có đạo hàm kéo theo liên tục; chiều ngược không luôn đúng.

Ví dụ hướng dẫn. $a(x) = |x|$ liên tục tại 0. Với $h > 0$, thương sai phân bằng 1; với $h < 0$, bằng -1 . Hai giới hạn không bằng nhau nên $a'(0)$ không tồn tại.

Cách tính tại điểm ghép. Với điểm ghép x_0 , tính giá trị $f(x_0)$ theo nhánh chứa điểm đó, rồi tính riêng giới hạn của hai nhánh khi x tiến đến x_0 từ trái và từ phải. Hàm liên tục tại x_0 khi cả hai giới hạn tồn tại và bằng đúng $f(x_0)$.

Sau đó dùng đúng giá trị vừa tính trong thương sai phân:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tính riêng giới hạn khi $h \rightarrow 0^-$ và $h \rightarrow 0^+$. Đạo hàm tại x_0 tồn tại khi hai giới hạn hữu hạn và bằng nhau. Không lấy đạo hàm của một nhánh rồi gán ngay cho điểm ghép.

Ở ví dụ $a(x) = |x|$, ta có $a(0) = 0$; hai giới hạn của $|x|$ đều bằng 0. Thương sai phân là $\frac{|h|}{h}$, bằng -1 khi $h < 0$ và bằng 1 khi $h > 0$. Vì vậy liên tục và có đạo hàm là hai câu hỏi khác nhau.

Tự kiểm tra mới. Cho

$$u(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{khi } x < 0, \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 0. \end{cases}$$

Kiểm tra tính liên tục và sự tồn tại của $u'(0)$. Dấu dương bên trái, âm bên phải có cho phép kết luận cực đại tại 0 không? Giải thích bằng định lý hoặc so sánh giá trị gần 0.

Đáp án và tiêu chí

Hai giới hạn và $u(0)$ đều bằng 2, nên liên tục. Thương sai phân trái có giới hạn 3, phải có giới hạn -1 , nên không có đạo hàm tại 0. Hàm đạt cực đại tại 0 vì liên tục và đổi từ tăng sang giảm; cũng có thể thấy $u(x) < 2 = u(0)$ với mọi $x \neq 0$ đủ gần. Đặt khi tách đủ ba câu hỏi: liên tục, đạo hàm, cực trị.

Xác nhận hẹp nếu lỗi là bỏ điều kiện liên tục. Giữ hai công thức trên khi $x \neq 0$ nhưng đặt giá trị tại 0 bằng 4. Có được dùng định lý đổi dấu đã học không; các giá trị ở đủ gần 0 so với giá trị 4 tại điểm ghép thế nào?

Đáp án xác nhận hẹp

Hàm không liên tục vì giới hạn là 2 nhưng giá trị là 4, nên không gọi định lý đó. Các giá trị ở đủ gần nhỏ hơn 4. Không yêu cầu phân loại cực trị theo quy ước chưa dạy.

Quay về: đúng câu về điểm ghép hoặc Điểm dừng đã gọi. Tự làm câu xác nhận trước khi mở đáp án; câu hẹp chỉ xác nhận việc kiểm điều kiện liên tục, không chứng nhận toàn bộ kỹ năng ở điểm ghép. Nếu câu phù hợp đã gặp trước đó hoặc còn sai, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này”, xem lại cách tính phía trên và ghi mục tiêu chưa xác nhận; không ghi đạt chỉ từ hình dáng quen thuộc hoặc làm lại đáp án đã biết.

Cận và giá trị được đạt

Dùng khi: em đọc một giới hạn hoặc tung độ ở điểm hờ thành giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Nhớ lại. Cận trên chỉ nói mọi giá trị không vượt qua một số. Giá trị lớn nhất còn phải là giá trị của hàm tại một điểm thuộc tập đang xét. Để chứng minh không có giá trị lớn nhất, cần loại mọi ứng viên, không chỉ một cận không đạt.

Ví dụ hướng dẫn. Với $a(x) = x$ trên $(0; 2)$, số 2 là cận trên nhưng không đạt. Với mỗi x trong tập, $y = \frac{x+2}{2}$ vẫn trong tập và $a(y) > a(x)$; do đó không có giá trị lớn nhất. Tương tự, $\frac{x}{2}$ cho giá trị nhỏ hơn nên không có giá trị nhỏ nhất.

Tự kiểm tra mới. Xét $u(x) = 4 - x$ trên $(1; 3]$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có. Trường hợp không tồn tại phải có lập luận áp dụng cho mọi điểm đang xét.

Đáp án và tiêu chí

Nhỏ nhất bằng 1 tại $x = 3$. Không có giá trị lớn nhất: với mỗi $x \in (1; 3]$, đặt $y = \frac{x+1}{2}$ thì $1 < y < x$ và $u(y) > u(x)$. Số 3 là cận trên không đạt. Đạt khi ghi đúng điểm thuộc tập và loại được mọi ứng viên lớn nhất, không chỉ nói “đầu mút hờ”.

Quay về: Quay lại bài hoặc Điểm dừng em đang làm trước khi mở thẻ này. Nếu đã xem đáp án, dùng câu này để ôn cách làm; không tính lần làm lại là một bài mới tự giải.

Phân biệt đồ thị hàm với đồ thị đạo hàm

Dùng khi: em lấy tung độ trên đồ thị đạo hàm làm giá trị hàm hoặc nhầm điểm hờ với giá trị tại điểm.

Nhớ lại. Nhân $y = f(x)$ cho biết tung độ là giá trị hàm. Nhân $y = f'(x)$ cho biết tung độ là giá trị đạo hàm. Một điểm kín thuộc đồ thị hàm xác định giá trị tại hoành độ ấy; điểm hờ không biểu thị giá trị được nhận tại vị trí đó.

Ví dụ hướng dẫn. Nếu hình $y = a'(x)$ nằm dưới trục hoành trên một khoảng, thông tin là $a'(x) < 0$ ở đó, không phải $a(x) < 0$.

Tự kiểm tra mới. Hình A ghi $y = u(x)$, có điểm kín $(2; 5)$ và điểm hờ $(2; 1)$. Hình B ghi $y = u'(x)$ và nằm trên trục hoành trong $(3; 4)$. Hãy nêu $u(2)$, dấu của u' trên $(3; 4)$ và xem có suy ra $u(3,5) > 0$ hay không. Dữ kiện bằng lời này thay cho hình; không yêu cầu đo từ ảnh.

Đáp án và tiêu chí

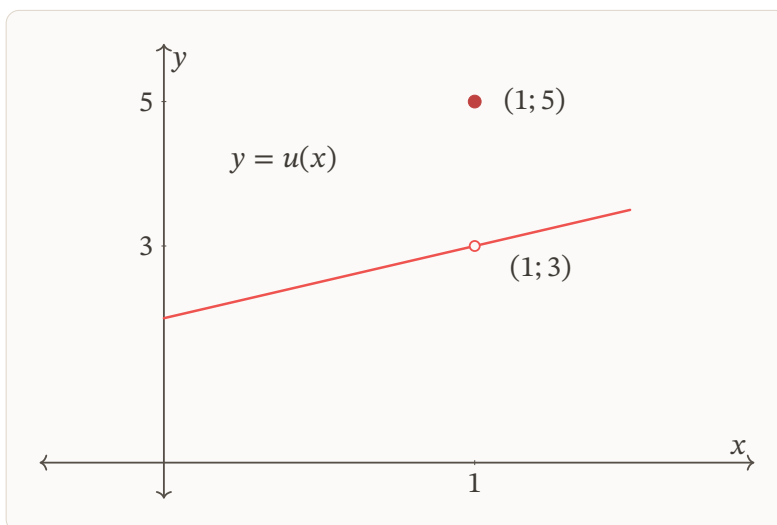
$u(2) = 5$; $u'(x) > 0$ trên $(3; 4)$; chưa đủ dữ kiện để biết dấu của $u(3,5)$. Đạt khi giải thích được nhận của hai hình và ý nghĩa điểm kín, điểm hờ.

Quay về: bài đọc đồ thị vừa dừng hoặc câu khởi động 04.

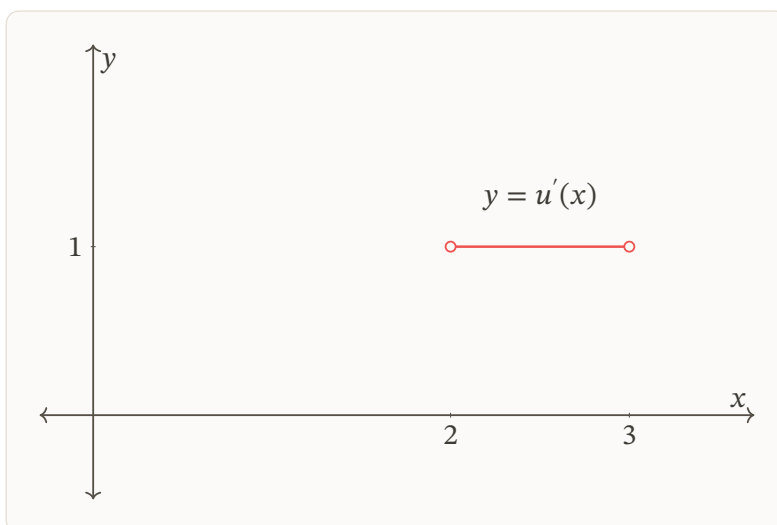
Xác nhận nền · Đọc hai hình mới

Nhiệm vụ 35 – Đọc hai hình

Sau khi đọc đồ thị, đóng đáp án rồi đọc hai hình dưới đây. Hàm số u có tập xác định $\mathbb{R}$; các hình chỉ cho một phần dữ kiện, không cho phép kéo dài đường vẽ sang phần chưa thể hiện.



Hình 3: Hình A: phần đồ thị u trên đoạn từ 0 đến 1,5; điểm kín tại (1;5), điểm hở tại (1;3).



Hình 4: Hình B: đồ thị đạo hàm u' nằm trên trục hoành trong khoảng (2;3); hai đầu khoảng không thuộc phần được vẽ.

Hãy nêu $u(1)$, dấu của $u'(2,5)$, và xem có đủ dữ kiện để kết luận $u(2,5) > 0$ hay không. Giải thích vai trò nhãn và điểm kín, điểm hở; không đo tung độ bằng mắt để suy ra một dữ kiện chưa cho.

Đối chiếu sau khi tự đọc hai hình

$u(1) = 5$; $u'(2,5) > 0$. Chưa đủ dữ kiện để biết dấu của $u(2,5)$: hình B cho thông tin về đạo hàm, còn hình A không cho giá trị hàm trên khoảng (2; 3). Đạt khi đúng cả ba kết luận và giải thích được nhãn, điểm kín, điểm hở; sai thì giữ bài làm, ôn lại đúng chỗ vướng và ghi phần cần một câu mới vào Nhật kí (trang 41).

Quay về đúng điểm đã gọi Ôn nền bằng nút quay về; nếu mở trực tiếp, dùng danh sách nơi quay về (trang 31).

Chọn hàm mục tiêu và đơn vị

Dùng khi: em tối ưu sai đại lượng, nhằm chi phí bình quân với tổng chi phí hoặc bỏ đơn vị.

Nhớ lại. Gọi rõ biến, tập giá trị được phép và đại lượng cần tối ưu. Nếu $G(x)$ là chi phí cho một sản phẩm thì tổng chi phí là $C(x) = xG(x)$; lợi nhuận là $P(x) = R(x) - C(x)$. Trong chuyển động thẳng, tốc độ là giá trị tuyệt đối của vận tốc, không phải tọa độ.

Ví dụ hướng dẫn. Nếu sản xuất x sản phẩm, doanh thu $R(x) = 20x$ nghìn đồng và chi phí bình quân $G(x) = x + 3 + \frac{12}{x}$ nghìn đồng/sản phẩm, thì $C(x) = x^2 + 3x + 12$ nghìn đồng và $P(x) = -x^2 + 17x - 12$ nghìn đồng. Đây mới là hàm cần tối đa; chưa xác định được phương án nếu chưa có ràng buộc của x .

Tự kiểm tra mới. Một cơ sở làm số nguyên x sản phẩm từ 1 đến 8, doanh thu $R(x) = 24x$ nghìn đồng, chi phí bình quân $G(x) = 2x + 4 + \frac{16}{x}$ nghìn đồng/sản phẩm. Chỉ lập tổng chi phí và lợi nhuận, ghi tập xác định và đơn vị; chưa cần tối ưu.

Đáp án và tiêu chí

$C(x) = 2x^2 + 4x + 16$ và $P(x) = -2x^2 + 20x - 16$, cùng tính bằng nghìn đồng; $x \in \{1; 2; \dots; 8\}$. Đạt khi nhân đúng $xG(x)$, chọn đúng lợi nhuận, không biến tập nguyên thành một đoạn thực và giữ đơn vị.

Quay về: bước chọn đại lượng hoặc lập mô hình của bài vừa dùng. Sai bước tối ưu sau khi đã lập đúng hàm thì dùng tuyến ứng viên thích hợp, không học lại toàn bộ mô hình.

So sánh các ứng viên nguyên

Dùng khi: em giữ nghiệm thực không được phép hoặc chỉ làm tròn một điểm tối ưu.

Nhớ lại. Khi biến chỉ được nhận một số giá trị nguyên, ta phải so sánh giá trị hàm số tại các số nguyên được phép. Với hàm bậc hai có hệ số của x^2 âm, giá trị hàm số càng lớn khi x càng gần hoành độ đỉnh của parabol. Vì vậy, trong tập các số nguyên được phép, chọn các số gần hoành độ đỉnh nhất rồi tính giá trị hàm số để so sánh; giữ đủ các phương án cùng cho giá trị lớn nhất. Nhận xét này dành cho hàm bậc hai nói trên, không phải quy tắc làm tròn áp dụng cho mọi hàm số.

Ví dụ hướng dẫn. Với $P(x) = -(x - 2,5)^2 + 10$, $x \in \{1; 2; 3; 4\}$, cả 2 và 3 đều cho giá trị 9,75. Chỉ chọn một số bằng làm tròn sẽ bỏ một phương án tối ưu.

Tự kiểm tra mới. Cho $P(x) = -x^2 + 9x - 8$, $x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm mọi số nguyên cho giá trị lớn nhất và giải thích vì sao không cần thử một số không thuộc tập.

Đáp án và tiêu chí

Parabol biểu diễn hàm số phụ có hoành độ đỉnh là 4,5. Hai giá trị nguyên được phép cần so sánh là 4 và 5; $P(4) = P(5) = 12$. Các số còn lại xa hoành độ đỉnh hơn nên cho giá trị hàm số nhỏ hơn. Bài làm cần ghi đủ hai phương án và so sánh trực tiếp; không viết $P(4,5)$ là giá trị đạt được của bài toán với biến nguyên.

Quay về: bước xử lý ràng buộc nguyên của bài hoặc điểm dừng vừa gọi.

Đạo hàm lượng giác cho nhánh chuyển giao

Dùng khi: em còn thiếu quy tắc đạo hàm hoặc xét dấu lượng giác. Thẻ hẹp này không thay toàn bộ kiến thức lượng giác.

Nhớ lại. Góc tính bằng radian. Đạo hàm của $\sin x$ là $\cos x$; của $\cos x$ là $-\sin x$; với hàm hợp phải nhân đạo hàm bên trong.

Ví dụ hướng dẫn. Với $a(x) = 3 \sin x - 2x$, $a'(x) = 3 \cos x - 2$. Để tìm ứng viên trên đoạn phải giải trong chính đoạn ấy, không giữ toàn bộ họ nghiệm ngoài tập.

Tự kiểm tra mới. Cho $u(x) = \sin(3x) - x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Tính đạo hàm, tìm nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 trong đoạn và xét dấu hai phía. Chưa cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Đáp án và tiêu chí

$u'(x) = 3 \cos(3x) - 1$. Trên đoạn đã cho, $3x \in [0; \pi]$ và cosin giảm từ 1 xuống -1 . Nghiệm duy nhất là $x_0 = \frac{\arccos(\frac{1}{3})}{3}$; đạo hàm dương trước x_0 , âm sau x_0 . Đạt khi giữ hệ số 3, giới hạn đúng khoảng góc và xét dấu trên đúng đoạn.

Quay về: bài chuyển giao lượng giác vừa gọi, rồi Điểm dừng Chuyển giao. Thiếu nền của nhánh này không phủ định bằng chứng phần cốt lõi.

Đạo hàm mũ và lôgarit cho nhánh chuyển giao

Dùng khi: em tính sai đạo hàm tích, thương, hàm mũ hoặc lôgarit. Chỉ mở sau khi đã học các quy tắc tương ứng.

Nhớ lại. e^x có đạo hàm e^x ; $\ln x$ xác định với $x > 0$ và có đạo hàm $\frac{1}{x}$. Khi lấy đạo hàm tích/thương hoặc hàm hợp, phải giữ đủ các phần và kiểm tập trước.

Ví dụ hướng dẫn. Với $a(x) = xe^{-x}$ trên $\mathbb{R}$, $a'(x) = e^{-x}(1 - x)$. Với $b(x) = x \ln x$ trên $(0; +\infty)$, $b'(x) = 1 + \ln x$.

Tự kiểm tra mới. (a) Tính và xét dấu đạo hàm của $u(x) = xe^{-2x}$ trên $[0; 2]$. (b) Xác định tập xác định và tính đạo hàm của $v(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$; tìm nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0.

Đáp án và tiêu chí

(a) $u'(x) = e^{-2x}(1 - 2x)$, dương khi $0 < x < \frac{1}{2}$, bằng 0 tại $\frac{1}{2}$, âm khi $\frac{1}{2} < x < 2$. (b) Tập xác định là $(0; +\infty)$; $v'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$, bằng 0 tại $x = \frac{e}{2}$. Đạt khi cả hai đạo hàm đúng, giữ hệ số của hàm hợp và điều kiện lôgarit; một ý đúng không thay cho ý còn sai.

Quay về: bài chuyển giao mũ-lôgarit vừa gọi rồi Điểm dừng Chuyển giao; không đổi kết quả cốt lõi vì thiếu tiên quyết riêng.

Quay về

Nếu vào Ôn nền từ một bài hoặc điểm dừng, quay về đúng đích đã gọi sau khi tự kiểm tra. Nếu mở trực tiếp, chọn Khởi động (trang 6), Bài học (trang 6), Chặng 1 (trang 16), Chặng 2 (trang 18), Chặng 3 (trang 19), Kiểm tra (trang 22), Điểm dừng 06 (trang 24), Điểm dừng 07 (trang 25), Điểm dừng 08 (trang 25) hoặc Chuyển giao (trang 20) theo bài đang làm, không mặc định quay về lượt Ôn lại đầu tiên.

Nếu tự kiểm tra vẫn sai hoặc đã xem đáp án, ghi phần chưa vững vào Nhật kí (trang 41). Không coi việc đọc xong thẻ là đã có kết quả tự làm. Các hướng dẫn quay về câu khởi động của thẻ dùng chung được điều chỉnh theo ngữ cảnh của học liệu này; luôn ưu tiên bài và điểm dừng đã gọi thẻ.

Sửa lỗi

Sau khi tự làm một nhiệm vụ trong Bài học, Luyện tập, sau khi kết thúc Kiểm tra hoặc trong Ôn lại, em có thể đối chiếu rồi sửa bước sai. Chọn dòng giống bài làm của em. Tự viết lại một câu giải thích đúng, rồi làm câu thử lại được chỉ dẫn mà chưa mở lời giải. Chọn đúng nhóm theo nguồn phát hiện: sau Luyện tập, sau Kiểm tra hoặc sau Ôn lại; không lấy một bài đã gặp trước đó ở nhóm khác làm kết quả tự làm một bài mới.

Nếu vẫn chưa làm được bài thử lại, xem đúng mục kiến thức (trang 6) hoặc thẻ Ôn nền (trang 26) được chỉ dẫn. Nếu đã biết lời giải của các bài kiểm tra lại hiện có, ghi phần cần kiểm tra thêm vào Nhật kí (trang 41); không dùng lần làm lại bài đã biết đáp án để kết luận đã tự giải được bài mới. Có thể tiếp tục nội dung khác mà em đã đủ kiến thức, đồng thời giữ lại phần đang vướng để học tiếp.

Giữ nguyên bài làm ban đầu. Dùng bảng dưới đây để tìm điều kiện hoặc bước suy luận đã bỏ, viết lại cho đúng, rồi tự làm bài khắc phục tương ứng trước khi mở lời giải. Nếu có nhiều lỗi, xử lí từng lỗi; không chỉ chọn lỗi dễ nhất.

Chọn bài sửa lỗi

Mỗi dòng dưới đây chỉ ra một điều cần phân biệt để hiểu bài vững hơn. Đối chiếu với bài làm của em, thử trả lời câu hỏi rồi xem lại phần học được dẫn khi cần. Chọn đúng bài và đúng ý theo nơi phát hiện; nếu đang học Bài học, có thể dùng nhóm Sau Luyện tập. Chỉ tự kiểm tra bằng bài phù hợp chưa gặp trước đó; trong lượt Kiểm tra phải kết thúc lượt trước khi dùng hỗ trợ.

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Cực trị cục bộ và giá trị trên toàn tập	Lấy ngay một giá trị cực đại làm giá trị lớn nhất.	Giá trị ấy đã được so sánh với mọi ứng viên hợp lệ chưa? Xác định tập đang xét và so sánh đầy đủ; cực trị không tự quyết định lớn nhất, nhỏ nhất. Xem lại kiến thức (trang 9).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 40 – Cực đại và toàn đoạn (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 48 – Cực trị không thay cho giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (trang 37). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 54 – Xen kẽ cực trị và giá trị lớn nhất (trang 39).
Điểm tới hạn và đầu mút	Chỉ giải phương trình đạo hàm bằng 0, bỏ hai đầu mút của đoạn.	Danh sách ứng viên còn thiếu đầu mút nào thuộc tập đang xét? Lập đủ danh sách trước khi tính và so sánh giá trị hàm số. Xem lại kiến thức (trang 11).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 40 – Cực đại và toàn đoạn (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 48 – Cực trị không thay cho giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (trang 37). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 54 – Xen kẽ cực trị và giá trị lớn nhất (trang 39).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Công thức, tập xác định và tập đang xét	Tính được biểu thức tại một số rồi coi số đó là điểm đạt hợp lệ.	Điểm ấy có thuộc cả tập xác định và tập đang xét không? Đọc đầy đủ dữ kiện; phép thay vào biểu thức không tự tạo giá trị của hàm số ngoài tập xác định. Xem lại kiến thức (trang 7).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 41 – Có cận nhưng không đạt (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 49 – Cùng công thức, khác tập xác định (trang 37). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 55 – Khoảng nửa kín và điểm ngoài tập (trang 39).
Cận và giá trị được đạt	Coi một mức chỉ tiến gần là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.	Có điểm nào thuộc tập đang xét làm hàm số bằng mức ấy không? Kiểm cả bất đẳng thức so sánh và sự tồn tại của điểm đạt; nếu không có, giải thích vì sao không có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tương ứng. Xem lại kiến thức (trang 9).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 41 – Có cận nhưng không đạt (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 49 – Cùng công thức, khác tập xác định (trang 37). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 55 – Khoảng nửa kín và điểm ngoài tập (trang 39).
Giá trị hàm số và sự tồn tại của đạo hàm	Bỏ điểm gãy dù hàm số có giá trị tại đó.	Đạo hàm không tồn tại có làm mất giá trị hàm số không? Giữ điểm hợp lệ có thể đạt lớn nhất, nhỏ nhất trong danh sách cần so sánh. Xem lại kiến thức (trang 11).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 42 – Điểm gãy và tọa độ (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 50 – Điểm không có đạo hàm vẫn có thể là ứng viên (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 56 – Điểm gãy và tọa độ (trang 39).
Từng thành phần và toàn bộ tập	Chỉ xét một nhánh hoặc nối kết luận đơn điệu qua điểm bị loại.	Đã xét và so sánh kết quả của mọi thành phần chưa? Làm việc trên từng thành phần, sau đó đối chiếu trên toàn tập đang xét. Xem lại kiến thức (trang 12).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 43 – Đọc hai thành phần (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 51 – Hai thành phần và một giá trị đạt (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 57 – Tập rời và điểm hở (trang 39).
Điểm hở và một giá trị có thể đạt ở nơi khác	Thấy điểm hở rồi loại luôn tung độ ấy khỏi tập giá trị.	Tung độ đó có được đạt tại một điểm khác không? Phân biệt một điểm không thuộc đồ thị với một giá trị không bao giờ đạt được. Xem lại kiến thức (trang 12).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 43 – Đọc hai thành phần (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 51 – Hai thành phần và một giá trị đạt (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 57 – Tập rời và điểm hở (trang 39).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Hoành độ, giá trị và điểm đạt	So sánh hoành độ thay cho giá trị hoặc ghi hoành độ vào chỗ giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.	Đề hỏi giá trị nào và điểm nào cho giá trị ấy? So sánh các giá trị hàm số; kết luận riêng giá trị và hoành độ điểm đạt. Xem lại kiến thức (trang 11).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 42 – Điểm gãy và tọa độ (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 50 – Điểm không có đạo hàm vẫn có thể là ứng viên (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 56 – Điểm gãy và tọa độ (trang 39).
Một điểm đạt và tất cả điểm đạt	Chỉ ghi một phương án khi nhiều điểm cùng cho giá trị tối ưu.	Còn điểm hợp lệ nào cho cùng giá trị tốt nhất không? Đối chiếu mọi ứng viên và ghi đủ các điểm đạt được đề bài yêu cầu. Xem lại kiến thức (trang 11).	Sau Luyện tập: chưa có bài riêng về nhiều điểm cùng đạt. Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 48 (trang 37). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 58 (trang 39) kiểm nhiều phương án nguyên cùng tối ưu.
Đồ thị hàm số và đồ thị đạo hàm	Đọc tung độ của đạo hàm thành giá trị lớn nhất của hàm số.	Đồ thị được cho là của đại lượng nào? Dùng dấu đạo hàm để xét biến thiên; giá trị hàm số cần dữ kiện riêng. Xem lại kiến thức (trang 13).	Sau Luyện tập: Xác nhận nên đọc đồ thị (trang 28), nếu chưa gặp trước đó. Sau Kiểm tra: Xác nhận nên đọc đồ thị (trang 28), nếu chưa gặp trước đó; chỉ sau khi kết thúc Kiểm tra. Sau Ôn lại: Xác nhận nên đọc đồ thị (trang 28), nếu chưa gặp trước đó.
Chi phí bình quân và tổng chi phí	Lấy doanh thu trừ chi phí bình quân để tính lợi nhuận.	Đơn vị của hai đại lượng đem trừ có giống nhau không? Lập tổng chi phí bằng số lượng nhân chi phí bình quân, rồi mới lập hàm mục tiêu. Xem lại kiến thức (trang 13).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 44 – Tổng chi phí và số nguyên (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 52 – Đỉnh nằm giữa hai số nguyên (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 58 – Hai nghiệm nguyên cùng tối ưu (trang 39).
Nghiệm tối ưu liên tục và ràng buộc số nguyên	Giữ nghiệm không nguyên hoặc làm tròn ngay mà không so sánh.	Những giá trị nguyên nào hợp lệ và cho giá trị mục tiêu tốt nhất? Dùng biến thiên để tìm ứng viên nguyên cần xét, so sánh trực tiếp và ghi đủ các phương án tối ưu. Xem lại kiến thức (trang 13).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 44 – Tổng chi phí và số nguyên (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 52 – Đỉnh nằm giữa hai số nguyên (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 58 – Hai nghiệm nguyên cùng tối ưu (trang 39).

Nút thắt nhận thức	Biểu hiện dễ nhầm	Câu hỏi và cách tháo gỡ	Tự kiểm tra
Điều kiện bảo đảm và điều kiện cần	Cho rằng đoạn đóng luôn bảo đảm tồn tại, hoặc thiếu liên tục thì chắc chắn không có lớn nhất, nhỏ nhất.	Đã đủ giả thiết để dùng định lý chưa; nếu chưa, định nghĩa cho biết gì? Kiểm tra liên tục trên đoạn; không áp dụng được định lý không đồng nghĩa kết luận ngược lại đúng. Xem lại kiến thức (trang 10).	Sau Luyện tập: Nhiệm vụ 45 – Đoạn đóng chưa đủ (trang 36). Sau Kiểm tra: Nhiệm vụ 53 – Đoạn đóng chưa đủ để dùng định lý tồn tại (trang 38). Sau Ôn lại: Nhiệm vụ 59 – Quay về định nghĩa khi hàm gián đoạn (trang 40).

Cách sửa theo lỗi

- **Nhầm cực trị với lớn nhất, nhỏ nhất; thiếu dấu nút.** Thấy cực đại rồi kết luận lớn nhất; chỉ giải $f'(x) = 0$; quên dấu nút. Ghi lại K , lập đủ danh sách điểm và so sánh các giá trị của f .
- **Nhầm tập xác định, tập đang xét hoặc sự đạt được.** Đồng nhất D với K ; bỏ dữ kiện về tập xác định rồi tự lấy $D = \mathbb{R}$; viết $f(a)$ dù $a \notin D$; đưa điểm ngoài K vào so sánh; coi cận là giá trị đạt được. Đọc D từ đầy đủ đề. Phân biệt tính biểu thức với tính $f(a)$; nếu xét trên $K \subseteq D$ thì kiểm tra thêm $a \in K$. Muốn bác bỏ sự tồn tại, chỉ ra vì sao mọi ứng viên đều bị một giá trị khác vượt qua.
- **Bỏ điểm không có đạo hàm.** Bỏ điểm không có đạo hàm dù hàm số có giá trị ở đó. Tách câu hỏi “ f có giá trị?” khỏi “ f có đạo hàm?”. Xét điểm đối công thức.
- **Bỏ thành phần hoặc đọc sai điểm hở và giới hạn.** Bỏ một thành phần; kéo kết luận đơn điệu qua chỗ bị loại; đọc giới hạn thành giá trị; thấy điểm hở rồi loại luôn tung độ ấy. Ghi tập giá trị của từng thành phần, rồi so sánh trên toàn K . Kiểm tra giá trị ở điểm hở có được đạt tại một điểm khác hay không.
- **Nhầm hoành độ, giá trị và điểm trên đồ thị.** Nhầm hoành độ, tung độ và điểm trên đồ thị. Viết riêng $x_0, f(x_0), (x_0; f(x_0))$.
- **Đọc nhầm đồ thị đạo hàm.** Đọc đồ thị f' thành f . Đọc nhãn trước; tung độ của hình f' không cho giá trị f .
- **Sai tổng chi phí hoặc điều kiện số nguyên.** Lấy $R - G$ khi G là chi phí bình quân; giữ nghiệm không nguyên hoặc tự làm tròn. Lập tổng chi phí xG ; xét đúng tập giá trị của x ; so sánh và ghi đơn vị.
- **Dùng sai định lý tồn tại.** Dùng bảo đảm liên tục trên đoạn khi thiếu điều kiện; hoặc thiếu điều kiện thì kết luận không tồn tại. Kiểm tra từng giả thiết. Nếu không áp dụng được, quay về định nghĩa.

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 40 – Cực đại và toàn đoạn

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 12x + 4$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f trên đoạn $[-3; 5]$. Giải thích vì sao giá trị cực đại 20 chưa quyết định đáp án.

Xem lời giải (trang 50)

Nhiệm vụ 41 – Có cận nhưng không đạt

Cho hàm số f có tập xác định $D = (-1; 2]$, với $f(x) = 5 - (x + 1)^2$. Phép tính $5 - (-1 + 1)^2 = 5$ có phải là tính $f(-1)$ không? Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có; giải thích đầy đủ trường hợp không tồn tại.

Xem lời giải (trang 50)

Nhiệm vụ 42 – Điểm gãy và tọa độ

1. Cho hàm số $v(x) = 1 - |x + 2|$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của v trên đoạn $[-4; 1]$.
2. Ghi riêng điểm đạt giá trị lớn nhất của hàm số, giá trị lớn nhất và tọa độ điểm tương ứng trên đồ thị $y = v(x)$. Nếu một hình khác ghi $y = v'(x)$, có được lấy tung độ trên hình đó làm $v(x)$ không?

Xem lời giải (trang 50)

Nhiệm vụ 43 – Đọc hai thành phần

Hàm số f có tập xác định $K = [-2; 0) \cup [1; 3]$ và liên tục trên từng thành phần của K . Trên $[-2; 0)$, hàm nghịch biến từ $f(-2) = 4$ và tiến tới 1 khi x tiến đến 0 từ bên trái. Trên $[1; 3]$, hàm nghịch biến từ $f(1) = 6$ đến $f(3) = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có.

Xem lời giải (trang 50)

Nhiệm vụ 44 – Tổng chi phí và số nguyên

Số sản phẩm x là số nguyên từ 1 đến 15. Doanh thu $R(x) = 50x$ nghìn đồng; chi phí bình quân $G(x) = 3x + 7 + \frac{10}{x}$ nghìn đồng/sản phẩm. Tìm số sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất.

Xem lời giải (trang 50)

Nhiệm vụ 45 – Đoạn đóng chưa đủ

Hàm số r có tập xác định $D = [0; 1]$, được cho bởi $r(0) = 1$ và $r(x) = x$ với $0 < x \leq 1$. Một bạn nói: “Tập đang xét là đoạn đóng nên hàm có cả giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.” Kiểm tra phát biểu rồi xác định điều thực sự đúng.

Xem lời giải (trang 50)

Tiêu chí xác nhận đã sửa lỗi.

Chỉ coi là đã sửa khi: em làm được câu mới và giải thích được điều kiện từng bỏ sót. Nếu vẫn sai, ghi một lỗi cụ thể cần xử lý ở lượt gần nhất, thay vì làm tiếp nhiều câu cùng cách sai.

Sau Chuyển giao

Nhiệm vụ 46 – Hàm lượng giác mới

Sau khi sửa lỗi ở nhiệm vụ 18 của Chuyển giao, thử một câu mới.

Cho $a(x) = \sin 2x - x$. Dùng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, góc đo bằng radian. Hãy làm ở lượt sau, khi đã đóng lời giải nhiệm vụ 18 của Chuyển giao.

Xem lời giải (trang 51)

Nhiệm vụ 47 – Hàm lôgarit mới

Kích hoạt khi học sinh đã bổ sung Ôn nền đạo hàm mũ-lôgarit (trang 31) hoặc cần xác nhận lại khả năng chuyển quy trình tối ưu sang hàm lôgarit

Cho

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

trên đoạn $[1; e^2]$.

1. Xác định tập xác định và kiểm tra đoạn đang xét có hợp lệ hay không.
2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của h trên đoạn và điểm đạt.
3. Trình bày danh sách ứng viên trước khi so sánh.

Xem lời giải (trang 51)

Sau Kiểm tra

Sau Điểm dừng 05 (trang 22), chọn đúng nhiệm vụ theo họ lỗi đã quan sát. Làm độc lập trước khi mở lời giải; đạt thì quay lại điểm đã gọi. Nếu thiếu nền, dùng đúng thẻ được chỉ dẫn rồi chọn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong bảng Sửa lỗi. Nếu không còn câu phù hợp, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí; không tự đặt thêm bài để chứng nhận.

Nhiệm vụ 48 – Cực trị không thay cho giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Cho $f(x) = x^4 - 2x^2$ trên đoạn $[-2; 2]$.

1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn.
2. Ghi tất cả các điểm đạt mỗi giá trị.
3. Cho biết điểm $x = 0$ có vai trò gì và vì sao không thể dùng riêng điểm đó để kết luận giá trị lớn nhất trên đoạn.

Xem lời giải (trang 52)

Nhiệm vụ 49 – Cùng công thức, khác tập xác định

Xét hai hàm có cùng công thức biểu diễn:

- f có tập xác định $D_f = \mathbb{R}$ và được yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $K = (1; 4]$;
- g có tập xác định $D_g = (1; 4]$;
- với mọi x thuộc tập xác định tương ứng, $f(x) = g(x) = (x - 1)^2$.

Với mỗi hàm, hãy xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập đang xét. Sau đó phân biệt ba phát biểu: “thay $x = 1$ vào biểu thức được 0”, “ $f(1) = 0$ ” và “ $g(1) = 0$ ”.

Xem lời giải (trang 52)

Nhiệm vụ 50 – Điểm không có đạo hàm vẫn có thể là ứng viên

Cho $v(x) = |x - 1|$ trên đoạn $[-1; 4]$.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
2. Ghi điểm đạt dưới cả hai dạng: hoành độ và tọa độ điểm trên đồ thị.
3. Giải thích vì sao việc $v'(1)$ không tồn tại không loại $x = 1$ khỏi danh sách ứng viên.

Xem lời giải (trang 52)

Nhiệm vụ 51 – Hai thành phần và một giá trị đạt

Cho

$$K = [-2; 0) \cup [1; 3]$$

và hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{khi } x \in [-2; 0), \\ 5 - x & \text{khi } x \in [1; 3]. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f trên K và ghi tất cả các điểm đạt. Phải nêu riêng kết quả trên từng thành phần trước khi kết luận cho toàn bộ K .

Xem lời giải (trang 53)

Nhiệm vụ 52 – Đỉnh nằm giữa hai số nguyên

Số sản phẩm x là số nguyên từ 1 đến 15. Doanh thu là $R(x) = 30x$ nghìn đồng. Chi phí bình quân là

$$G(x) = 2x + 4 + \frac{42}{x}$$

nghìn đồng trên một sản phẩm.

Tìm mọi số sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất và mức lợi nhuận đó. Bài làm phải chỉ rõ tổng chi phí, tập xác định của bài toán và cách xử lý điểm tối ưu của hàm phụ biến thực.

Xem lời giải (trang 53)

Nhiệm vụ 53 – Đoạn đóng chưa đủ để dùng định lý tồn tại

Cho hàm số có tập xác định $D = [0; 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{khi } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Có thể áp dụng trực tiếp định lý về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm liên tục trên đoạn hay không?
2. Hãy dùng định nghĩa để xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất nếu có.

Xem lời giải (trang 54)

Sau Ôn lại

Nếu một học sinh tái xuất hiện ở Điểm dừng Ôn lại đang thực hiện, làm đúng nhiệm vụ tương ứng dưới đây nếu chưa gặp trước đó. Đạt thì quay lại lượt Ôn lại; sai thì xem lại đúng phần được chỉ dẫn và rút ngắn lịch ôn. Nếu không còn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật ký; có thể tiếp tục mục tiêu khác độc lập với phần đang vướng.

Nhiệm vụ 54 – Xen kẽ cực trị và giá trị lớn nhất

Cho $f(x) = (x^2 - 1)^2$ trên $[-2; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và mọi điểm đạt. Cho biết $x = 0$ là điểm cực trị nào và có tạo ra giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất trên đoạn hay không.

Xem lời giải (trang 54)

Nhiệm vụ 55 – Khoảng nửa kín và điểm ngoài tập

Cho $D = (0; 2]$ và $f(x) = x + 1$ với $x \in D$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất nếu có. Giải thích vì sao kết quả của phép thay $x = 0$ vào biểu thức không phải là một giá trị của hàm.

Xem lời giải (trang 55)

Nhiệm vụ 56 – Điểm gãy và tọa độ

Cho $f(x) = |2x - 3|$ trên $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất; ghi hoành độ và tọa độ điểm đạt mỗi giá trị. Nêu vai trò của điểm không có đạo hàm.

Xem lời giải (trang 55)

Nhiệm vụ 57 – Tập rời và điểm hở

Cho $K = (-1; 0] \cup (2; 4]$ và $f(x) = x$ trên K . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất nếu có và giải thích bằng từng thành phần của K .

Xem lời giải (trang 55)

Nhiệm vụ 58 – Hai nghiệm nguyên cùng tối ưu

Lợi nhuận theo mô hình là

$$P(x) = -x^2 + 7x - 5$$

nghìn đồng, trong đó $x \in \{1; 2; \dots; 9\}$ là số sản phẩm. Tìm mọi số sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất và mức lợi nhuận đó. Không dùng quy tắc làm tròn.

Xem lời giải (trang 55)

Nhiệm vụ 59 – Quay về định nghĩa khi hàm gián đoạn

Cho hàm số trên $D = [0; 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leq x < 2, \\ -1 & \text{khi } x = 2. \end{cases}$$

Không viện dẫn máy móc định lý về hàm liên tục trên đoạn. Hãy xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất nếu có và nêu căn cứ.

Xem lời giải (trang 56)

Nhật kí

Sao chép mẫu trống này ra giấy hoặc công cụ ghi chú. Không có ô nào được điền sẵn “đã đạt”.

Trường	Em ghi
Ngày–giờ	...
Gói / mục tiêu	...
Nguồn phát hiện	...
Bài làm ban đầu	...
Mức hỗ trợ ban đầu	...
Bảng chứng quan sát	...
Phân loại	...
Mã lỗi hoặc mã Nền	...
Hành động	...
Bài khắc phục mới	...
Trạng thái sau sửa	...
Hẹn Ôn lại	...
Kết quả sau khoảng trễ	...
Quyết định tiếp theo	...

Ví dụ giả lập — không phải kết quả thật của một học sinh. Ví dụ dùng một bài của Đơn điệu và cực trị để minh họa cách ghi; khi dùng mẫu ở gói khác, ghi đúng bài của gói đang học, không phải làm thêm bài trong ví dụ này.

Trường	Ví dụ ghi
Ngày–giờ	10/10/2026, 19:40
Gói / mục tiêu	Đơn điệu và cực trị / xét dấu hai phía để kết luận cực trị
Nguồn phát hiện	Điểm dừng 01, nhiệm vụ 13 của Luyện tập
Bài làm ban đầu	Kết luận “ g có cực trị tại -1 vì $g'(-1) = 0$ ”
Mức hỗ trợ ban đầu	Tự làm, chưa xem lời giải
Bảng chứng quan sát	Đã có $g'(x) = -(x+1)^2$ nhưng bỏ qua dấu âm ở cả hai phía của -1
Phân loại	Lỗi mục tiêu
Mã lỗi hoặc mã Nền	Coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị
Hành động	Xem lại trường hợp đạo hàm không đổi dấu; sửa kết luận và nêu dấu hai phía
Bài khắc phục mới	Nhiệm vụ 38 của Sửa lỗi sau Luyện tập, chưa xem đề/đáp án trước đó; tự làm từ $b'(x) = -(x-1)^4$, kết luận nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị tại 1, giải thích bằng dấu
Trạng thái sau sửa	Đã xác nhận đúng lỗi này trong lượt; chưa chứng nhận cả chặng hoặc độ bền
Hẹn Ôn lại	Chưa hẹn ba lượt toàn gói vì chưa hoàn tất lượt chính; kiểm riêng lỗi này ở buổi học kế tiếp
Kết quả sau khoảng trễ	Chưa kiểm; chỉ ghi kết quả khi thực sự tự làm sau khoảng trễ

Trường	Ví dụ ghi
Quyết định tiếp theo	Quay về Điểm dừng 01, kiểm các tiêu chí còn lại trước khi sang chặng 2

Nếu bài khắc phục còn sai, xem lại đúng phần nền hoặc mục học theo nguyên nhân; chưa đánh dấu lỗi đã sửa. Nếu tự làm bài phù hợp chưa gặp trước đó và giải thích đúng, ghi “đã xác nhận lỗi này trong lượt” rồi quay về nơi đã gọi hỗ trợ. Không coi kết quả của một bài là chứng nhận cả chặng hoặc cả gói. Nếu không còn bài xác nhận phù hợp chưa gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận. Hẹn các lượt Ôn lại toàn gói từ ngày hoàn tất lượt chính; lần kiểm riêng một lỗi vừa sửa được ghi riêng. Chỉ ghi độ bền khi có kết quả thực tế sau khoảng trễ.

Ví dụ ghi nhật kí dùng chung ở trên minh họa một lượt học gói Đơn điệu và cực trị; khi dùng cho gói này, ghi tên bài và điểm dừng thực tế của em.

Lời giải

Chỉ mở lời giải của bài đã tự làm. Đối chiếu tập đang xét, điều kiện và lí do trước đáp số. Giữ bài làm ban đầu để nhận ra đúng bước cần sửa.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 — Cực đại và giá trị lớn nhất

Không. Giá trị 1 chỉ là cực đại cục bộ; $r(-3) = 5 > 1$. Toàn bảng cho giá trị lớn nhất 5 tại -3 và nhỏ nhất -2 tại 0.

Xem đề bài (trang 6)

Nhiệm vụ 02 — Tập đang xét và điểm đạt

Nhận xét sai. Phép tính $f(2) = 0$ đúng, nhưng $2 \notin K$. Với mọi $x \in K$, ta có $f(x) > 0$, nên 0 không phải giá trị nhỏ nhất trên K . Việc có một giá trị nhỏ nhất khác hay không sẽ được xét ở Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Xem đề bài (trang 6)

Nhiệm vụ 03 — Đọc đúng đồ thị đạo hàm

Chỉ suy ra $f'(1) = 0$. Tung độ trên đồ thị đạo hàm không phải giá trị của hàm số ban đầu.

Xem đề bài (trang 6)

Nếu vướng câu 2, đọc mục Hàm số được cho bằng cả quy tắc và tập xác định (trang 7). Nếu vướng câu 3, hãy đọc nhãn trên hình trước: với nhãn $y = f(x)$, tung độ là $f(x)$; với nhãn $y = f'(x)$, tung độ là $f'(x)$.

Nhiệm vụ trong Bài học

Nhiệm vụ 04 — Điểm bị loại và sự đạt được

Với mọi $x \in K$, $0 < (x - 2)^2 \leq 9$; dấu bằng bên phải xảy ra tại $x = 5$. Vì vậy giá trị lớn nhất bằng 9 tại $x = 5$. Giá trị 0 không được đạt trên K vì phương trình $(x - 2)^2 = 0$ chỉ có nghiệm 2, mà $2 \notin K$.

Để loại cả khả năng có một giá trị nhỏ nhất dương, lấy bất kì $x \in K$ và đặt $y = \frac{x+2}{2}$. Khi đó $2 < y < x \leq 5$ và $f(y) = \frac{f(x)}{4} < f(x)$. Mọi giá trị của f trên K đều có một giá trị khác nhỏ hơn. Do đó hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên K .

Xem đề bài (trang 9)

Nhiệm vụ 05 — Hàm hằng và cực trị

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đều bằng 2, đạt tại mọi điểm thuộc $(0; 1)$: mọi giá trị đều không lớn hơn 2 và không nhỏ hơn 2. Hàm số không có điểm cực đại hay cực tiểu, vì giá trị tại mỗi điểm đều bằng các giá trị ở những điểm gần nó; không có sự lớn hơn hoặc nhỏ hơn nghiêm ngặt.

Xem đề bài (trang 10)

Nhiệm vụ 06 — Kiểm điều kiện liên tục

Giới hạn của q khi x tiến đến 1 từ bên trái bằng 1, khác $q(1) = 0$: q không liên tục trên đoạn. Không được dùng quy trình cho hàm liên tục. Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại 0 và 1. Không có giá trị lớn nhất: với mỗi giá trị $c \in [0; 1)$, điểm $y = \frac{c+1}{2}$ thuộc $(0; 1)$ cho $q(y) = y > c$.

Cũng không được đảo thành “không liên tục thì không thể có cả hai giá trị”. Hàm bằng 0 trên $[0; 1)$ và bằng 1 tại 1 vẫn có giá trị nhỏ nhất 0 và lớn nhất 1.

Xem đề bài (trang 10)

Nhiệm vụ 07 — Lập đủ điểm cần so sánh

Hàm số p có tập xác định $\mathbb{R}$; tập đang xét là $K = [-1; 4]$. Đoạn này nằm trong tập xác định và p liên tục trên đoạn đó. Ta có $p'(x) = 2x - 4$, bằng 0 tại $x = 2 \in (-1; 4)$. Đạo hàm tồn tại tại mọi điểm bên trong đoạn.

x	-1	2	4
$p(x)$	6	-3	1

Giá trị lớn nhất bằng 6 tại $x = -1$; giá trị nhỏ nhất bằng -3 tại $x = 2$.

Kiểm tra bằng biểu diễn khác: $p(x) = (x - 2)^2 - 3$. Trên $[-1; 4]$, khoảng cách từ x đến 2 nhỏ nhất bằng 0, lớn nhất bằng 3. Vì vậy $-3 \leq p(x) \leq 6$, với dấu bằng tại các điểm vừa tìm.

Điểm 4 lớn hơn điểm 2 về hoành độ, nhưng đó không phải tiêu chí chọn giá trị lớn nhất. Cần so sánh hàng $p(x)$.

Xem đề bài (trang 11)

Nhiệm vụ 08 — Chọn giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện

Không. Phải chọn $x = 3$ vì $P(3) = 9,2 > P(2) = 8$. Chiều biến thiên giúp chọn ứng viên; so sánh giá trị mới quyết định đáp án.

Xem đề bài (trang 13)

Luyện tập

Nhiệm vụ 09 – Cực đại có phải lớn nhất?

Hàm số liên tục trên đoạn. $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại -1, từ âm sang dương tại 1. Hàm số có giá trị cực đại $f(-1) = 2$, giá trị cực tiểu $f(1) = -2$.

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

Giá trị lớn nhất là 18 tại $x = 3$. Giá trị nhỏ nhất là -2, đạt tại $x = -2$ và $x = 1$.

Nhận xét sai vì chỉ xét cực đại cục bộ và bỏ đầu mút: $f(3) = 18 > 2$. Có thể kiểm tra từ ba khoảng biến thiên: tăng trên $[-2; -1]$, giảm trên $[-1; 1]$, tăng trên $[1; 3]$.

Xem đề bài (trang 15)

Nhiệm vụ 10 – Một điểm không có đạo hàm

Hàm số liên tục trên đoạn. Trên $(-4; -2)$, đạo hàm bằng -1 ; trên $(-2; 1)$, đạo hàm bằng 1 ; tại -2 đạo hàm không tồn tại nhưng giá trị hàm số vẫn có.

Cần so sánh $g(-4) = 2, g(-2) = 0, g(1) = 3$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -2$; giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 1$.

Khoảng cách từ x đến -2 trên đoạn đã cho nhỏ nhất bằng 0 , lớn nhất bằng 3 . Cách đọc này kiểm tra được kết quả mà không dùng đạo hàm.

Xem đề bài (trang 15)

Nhiệm vụ 11 – Chọn cách so sánh trực tiếp

Điều kiện $4 - (x - 1)^2 \geq 0$ cho $D = [-1; 3]$, còn $K = [0; 3]$ là một phần của D . Trên $K, 0 \leq s(x) \leq 2$.

Giá trị lớn nhất bằng 2 , đạt tại $x = 1$. Phương trình $s(x) = 0$ có hai nghiệm -1 và 3 , nhưng chỉ 3 thuộc K . Giá trị nhỏ nhất trên K bằng 0 tại $x = 3$. So sánh trực tiếp đã đủ để kết luận, không cần tính đạo hàm. Tại đầu mút 3 , hàm vẫn có giá trị dù công thức đạo hàm ở bên trong không áp dụng tại đó.

Xem đề bài (trang 16)

Nhiệm vụ 12 – Tập không bị chặn, hàm vẫn bị chặn

Với mọi x thực, $0 < h(x) \leq 1$, và $h(0) = 1$. Vậy giá trị lớn nhất là 1 tại $x = 0$.

Không có giá trị nhỏ nhất. Với bất cứ x nào, chọn $y = \sqrt{x^2 + 1}$; khi đó $h(y) = \frac{1}{x^2 + 2} < h(x)$. Mọi giá trị đang có đều bị một giá trị khác nhỏ hơn vượt xuống.

Số 0 là cận dưới và được tiến gần tùy ý, nhưng không đạt. Có thể kiểm tra thêm bằng $h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$: hàm tăng đến $x = 0$ rồi giảm.

Xem đề bài (trang 16)

Nhiệm vụ 13 – Hai thành phần đều cần được xét

Trên thành phần đầu, giá trị thuộc $[-2; -1]$; trên thành phần sau, giá trị thuộc $(0; 1)$. Vì vậy mọi giá trị đều không nhỏ hơn -2 , và $f(-2) = -2$: giá trị nhỏ nhất bằng -2 tại $x = -2$.

Không có giá trị lớn nhất. Mọi giá trị ở thành phần đầu đều nhỏ hơn $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Với mỗi $x \in (0; 1)$, điểm $\frac{x+1}{2}$ cùng thuộc thành phần này và cho giá trị lớn hơn. Số 1 không được đạt.

Chỉ xét thành phần đầu sẽ cho kết luận sai rằng -1 là giá trị lớn nhất trên K .

Xem đề bài (trang 17)

Công thức để đối chiếu sau khi đọc hình

$f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Hãy kiểm tra giá trị và điểm đạt trên K .

Xem đề bài (trang 17)

Nhiệm vụ 14 – Đọc giá trị và sự đạt được trên đồ thị

Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 0$; điểm trên đồ thị là $(0; 0)$.

Không có giá trị lớn nhất. Trên $K, 0 \leq x^2 < 4$, và các giá trị tiến gần 4 khi x tiến đến 2 từ bên trái. Để thấy mọi giá trị đều có thể bị vượt qua, với bất kì $x \in K$ đặt $t = \frac{|x|+2}{2}$. Khi đó $|x| < t < 2, t \in K$, nên $t^2 > x^2$.

Điểm hử (2; 4) không thuộc phần đồ thị đang xét trên K . Hàm số vẫn có $f(2) = 4$ trên $D = \mathbb{R}$, nhưng $2 \notin K$. Để kiểm tra giá trị 4 có đạt ở điểm khác không, giải $x^2 = 4$: cả 2 và -2 đều không thuộc K . Kết hợp với lập luận ở trên, 4 là cận trên không đạt và không có giá trị lớn nhất.

Xem đề bài (trang 17)

Nhiệm vụ 15 – Điểm nào được dùng để so sánh?

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Với $x \in D$, $f'(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x+1)^2}$. Hai nghiệm là -5 và 3 . Điểm -5 thuộc D nhưng không thuộc K , nên bị loại khỏi các điểm cần xét trên K .

Trên K , đạo hàm âm khi $-1 < x < 3$ và dương khi $x > 3$. Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 3$. Kiểm tra trực tiếp: mẫu $x + 1$ dương, tử $(x - 3)^2$ không âm, bằng 0 đúng tại 3.

Không có giá trị lớn nhất. Với $x > -1$, $f(x) = x - 7 + \frac{16}{x+1} > x - 7$. Cho bất kì số M nào, chọn $x > \max\{-1; M + 7\}$ thì $f(x) > M$. Các giá trị trên K không bị chặn trên.

Xem đề bài (trang 17)

Nhiệm vụ 16 – Từ doanh thu đến lợi nhuận

Hàm lợi nhuận có tập xác định $D = [1; 10]$ theo mô hình, với $P(x) = -\frac{x^3}{4} + 27x - 12$, liên tục trên đoạn đó. Với $x \in (1; 10)$, $P'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4}$. Phương trình đại số $27 - \frac{3x^2}{4} = 0$ có hai nghiệm -6 và 6 ; chỉ $x = 6$ thuộc $(1; 10)$, nên chỉ điểm này là nghiệm của $P'(x) = 0$ trong khoảng đang xét.

$$P(1) = \frac{59}{4}; P(6) = 96; P(10) = 8.$$

Sản xuất 6 tấn cho lợi nhuận lớn nhất 96 triệu đồng theo mô hình.

Kiểm tra: $96 - P(x) = \frac{(x-6)^2(x+12)}{4} \geq 0$ trên $[1; 10]$, bằng 0 đúng khi $x = 6$. Đây cũng là một chứng minh trực tiếp cho kết quả.

Xem đề bài (trang 18)

Nhiệm vụ 17 – Chi phí bình quân và ràng buộc nguyên

Tổng chi phí là

$$C(x) = xG(x) = 2x^2 + 9x + 30$$

nghìn đồng. Do đó lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 31x - 30,$$

với tập xác định của bài toán là $\{1; 2; \dots; 12\}$.

Xét hàm phụ Q có tập xác định $\mathbb{R}$ và cùng công thức:

$$Q(t) = -2t^2 + 31t - 30.$$

Parabol quay xuống và có đỉnh tại $t = \frac{31}{4} = 7,75$. Vì biến của bài toán phải nguyên, cần so sánh hai số nguyên được phép nằm hai phía của đỉnh:

$$P(7) = 89, \quad P(8) = 90.$$

Các số nguyên còn lại ở xa trục đối xứng hơn nên cho giá trị nhỏ hơn. Vậy cơ sở nên sản xuất 8 sản phẩm; lợi nhuận lớn nhất là 90 nghìn đồng.

Không được dùng quy tắc làm tròn chung vì giá trị lớn nhất trên tập số nguyên phụ thuộc vào giá trị hàm tại các ứng viên được phép. Cần so sánh trực tiếp, đặc biệt khi đỉnh nằm chính giữa hai số nguyên hoặc tập cho phép có thêm ràng buộc.

Tiêu chí đạt: lập đúng $C = xG$, không lấy G làm tổng chi phí; ghi đúng tập giá trị nguyên của x ; dùng hàm phụ biến thực có tên riêng hoặc diễn đạt tương đương; so sánh 7 và 8, không chỉ làm tròn 7,75; kết luận đủ số sản phẩm, lợi nhuận và đơn vị.

Tuyến sau bài: đạt thì quay về Điểm dừng 03 (trang 19), hoàn tất Chặng 3 (trang 18) nếu Nhiệm vụ 16 (trang 18) cũng đạt. Sai lập mô hình hoặc đơn vị thì đi Hàm mục tiêu và đơn vị (trang 30), sai ràng buộc nguyên thì đi Ứng viên nguyên (trang 30). Sau đó chọn Nhiệm vụ 44 của Sửa lỗi (trang 36) nếu chưa gặp trước đó và đúng lỗi cần xác nhận. Không bắt buộc làm thêm một câu trước bài này; nếu bài đã gặp trước đó và không còn câu phù hợp, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 19)

Chuyển giao

Nhiệm vụ 18 – Hàm lượng giác

Hàm số liên tục trên đoạn. $f'(x) = 2 \cos x - 1$, bằng 0 tại $x = \frac{\pi}{3}$ trong đoạn. Đạo hàm dương trên $(0; \frac{\pi}{3})$ và âm trên $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

Các giá trị cần so sánh:

$$f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ tại $x = \frac{\pi}{3}$. Giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = 0$.

Chiều biến thiên bảo đảm giá trị ở $\frac{\pi}{3}$ lớn hơn hai đầu mút; giữa hai đầu mút, $2 - \frac{\pi}{2} > 0$ vì $\pi < 4$.

Xem đề bài (trang 20)

Nhiệm vụ 19 – Hàm mũ và lôgarit

a) $u'(x) = e^{-x}x(2-x)$. Hàm tăng trên $(0; 2)$, giảm trên $(2; 4)$. So sánh $u(0) = 0$, $u(2) = \frac{4}{e^2}$, $u(4) = \frac{16}{e^4}$: lớn nhất $\frac{4}{e^2}$ tại 2, nhỏ nhất 0 tại 0.

b) Hàm số v có tập xác định $D = (0; +\infty)$. Tập đang xét $K = [1; e^2]$ nằm trong D . Hàm số liên tục trên K ; trong $(1; e^2)$, $v'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Hàm tăng trên $(1; e)$, giảm trên $(e; e^2)$. Các giá trị $v(1) = 0$, $v(e) = \frac{1}{e}$, $v(e^2) = \frac{2}{e^2}$ cho lớn nhất $\frac{1}{e}$ tại e , nhỏ nhất 0 tại 1.

Cả hai hàm đều liên tục trên đoạn đang xét. Cấu trúc bài toán không đổi khi thay họ hàm số.

Xem đề bài (trang 20)

Kiểm tra

Nhiệm vụ 20 – Đọc đồ thị trên tập được chỉ định

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, còn $K = (1; 3]$. Dữ kiện $g(1) = 3$ đúng; suy ra giá trị lớn nhất trên K bằng 3 là sai. Điểm 1 không thuộc K , và mọi điểm của phần đồ thị đang xét đều có tung độ nhỏ hơn 3.

Hàm nghịch biến trên K nên giá trị nhỏ nhất bằng -1 , đạt tại $x = 3$. Không có giá trị lớn nhất: với bất kì $x \in K$, điểm $y = \frac{x+1}{2}$ thỏa $1 < y < x \leq 3$, nên $g(y) > g(x)$.

Điểm hồ biểu thị việc loại điểm khỏi phần đồ thị trên K ; không có nghĩa là g không xác định tại 1. Kết luận từ hình không cần biết công thức của g .

Nếu sai, xem lại đúng phần Bài học (trang 7), rồi làm Nhiệm vụ 49 (trang 37) khi chưa xem đáp án. Giữ riêng bài kiểm tra ban đầu; kết quả sau hỗ trợ không thay thế nó. Nếu nhiệm vụ đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa được xác nhận vào Nhật kí (trang 41) và quay về Điểm dừng 05 (trang 22).

Xem đề bài (trang 21)

Nhiệm vụ 21 – Có thể đạt tại nhiều điểm

Hàm liên tục trên đoạn; $h'(x) = 3x(x-2)$. Danh sách điểm là $-1, 0, 2, 3$, với giá trị lần lượt $-3, 1, -3, 1$.

Giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = 0$ và $x = 3$; nhỏ nhất bằng -3 tại $x = -1$ và $x = 2$.

Trên $[-1; 3]$, $h(x) - 1 = x^2(x-3) \leq 0$ và $h(x) + 3 = (x+1)(x-2)^2 \geq 0$. Các trường hợp dấu bằng xác nhận đầy đủ các điểm đạt.

Nếu bỏ dấu mũ hoặc chỉ xét cực trị: xem Trên đoạn đóng (trang 10), rồi tự làm Nhiệm vụ 48 (trang 37) chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra. Kết quả sau hỗ trợ không thay bài làm tự lực ban đầu. Nếu câu đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào Nhật kí (trang 41) và trở về Điểm dừng 05 (trang 22).

Xem đề bài (trang 21)

Nhiệm vụ 22 – Đọc toàn bảng

Nhờ tính liên tục và chiều biến thiên đã cho, tập giá trị trên $[-3; -1]$ là $[2; 5]$, còn trên $(0; 2]$ là $(0; 4]$. Tập giá trị của f trên toàn K là $(0; 5]$.

Giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -3$; không có giá trị nhỏ nhất.

Giới hạn 0 ở đầu mút hờ không phải một giá trị được đạt trên K : cả hai thành phần đều chỉ cho giá trị dương. Mỗi giá trị ở thành phần đầu lớn hơn một giá trị đủ gần 0 của thành phần sau; trong thành phần sau, mọi điểm đều có điểm nhỏ hơn ở cùng thành phần cho giá trị hàm số nhỏ hơn.

Với h : $h(x) \geq 0$ và $h(-1) = 0$, nên giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại -1 . Không có giá trị lớn nhất: tại $x = -1 - t$, với $t \geq 0$, ta có $h(x) = t^2$, lớn tùy ý khi t tăng.

Nếu bỏ một thành phần hoặc lấy giới hạn làm giá trị đạt được: xem Các tập khác đoạn đóng (trang 12), rồi tự làm Nhiệm vụ 51 (trang 38) chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra. Kết quả sau hỗ trợ không thay bài làm tự lực ban đầu. Nếu câu đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào Nhật kí (trang 41) và trở về Điểm dừng 05 (trang 22).

Xem đề bài (trang 21)

Nhiệm vụ 23 – Biến nhận giá trị nguyên

Tổng chi phí:

$$C(x) = xG(x) = 2x^2 + 10x + 50.$$

Lợi nhuận:

$$P(x) = -2x^2 + 62x - 50 = \frac{861}{2} - 2\left(x - \frac{31}{2}\right)^2.$$

Hàm lợi nhuận P có tập xác định $\{1; 2; \dots; 20\}$. Nếu dùng hàm phụ Q có tập xác định $\mathbb{R}$ và công thức $Q(t) = -2t^2 + 62t - 50$, thì Q đạt lớn nhất tại $t = 15,5$. Nhưng $15,5$ không thuộc tập xác định của P . Trên các số nguyên từ 1 đến 20, bình phương khoảng cách đến $15,5$ nhỏ nhất tại 15 và 16.

Cả 15 và 16 sản phẩm đều cho lợi nhuận lớn nhất 430 nghìn đồng.

Giá trị 430,5 là giá trị lớn nhất của Q . Không có giá trị $P(15,5)$; lợi nhuận đạt được lớn nhất của bài toán là 430 nghìn đồng.

Nếu nhầm chỉ phí bình quân, đơn vị hoặc số nguyên: xem Mô hình và ràng buộc (trang 13), rồi tự làm Nhiệm vụ 52 (trang 38) chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra. Kết quả sau hỗ trợ không thay bài làm tự lực ban đầu. Nếu câu đã gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào Nhật kí (trang 41) và trở về Điểm dừng 05 (trang 22).

Xem đề bài (trang 22)

Nhiệm vụ 24 – Phản biện lời giải dùng đạo hàm

Bạn bỏ điểm $x = 1$, nơi u có giá trị nhưng không có đạo hàm. Hàm liên tục trên đoạn. Cần so sánh $u(-2) = -1$, $u(1) = 2$, $u(3) = 0$.

Giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 1$; nhỏ nhất bằng -1 tại $x = -2$.

Kiểm tra bằng khoảng cách: $|x - 1|$ nhỏ nhất bằng 0 tại 1 và lớn nhất bằng 3 tại -2 .

Nếu bỏ điểm không có đạo hàm: xem Trên đoạn đóng (trang 10) và tự làm Nhiệm vụ 50 (trang 38) chưa gặp trước đó của Sửa lỗi sau Kiểm tra.

Xem đề bài (trang 22)

Ôn lại

Nhiệm vụ 25 – Tập xác định và sự đạt được

Điểm -1 không thuộc D nên $f(-1)$ không xác định, dù biểu thức x có nghĩa tại -1 . Giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 2$. Không có giá trị nhỏ nhất: với mỗi $x > -1$ trong tập, $y = \frac{x-1}{2}$ vẫn thuộc tập và $-1 < y < x$.

Xem đề bài (trang 24)

Nhiệm vụ 26 – Một tập không bị chặn

$0 < g(x) \leq \frac{1}{4}$; lớn nhất $\frac{1}{4}$ tại $x = 0$. Không có giá trị nhỏ nhất: chọn $y = \sqrt{x^2 + 1}$ thì $g(y) < g(x)$. Số 0 là cận dưới không đạt.

Xem đề bài (trang 25)

Nhiệm vụ 27 – Chọn đại lượng trong bối cảnh

Trên thời gian đang xét $[1; 3]$, vận tốc $v(t) = s'(t) = 3(t - 2)^2$ không âm, nên tốc độ bằng $v(t)$. Các giá trị cần so sánh là $v(1) = 3$, $v(2) = 0$, $v(3) = 3$. Vật chậm nhất tại $t = 2$ giây, tốc độ 0 m/s; nhanh

nhất tại $t = 1$ và $t = 3$ giây, tốc độ 3 m/s. Có thể kiểm tra trực tiếp từ khoảng cách của t đến 2. Cần tối ưu tốc độ, không tối ưu tọa độ $s(t)$.

Xem đề bài (trang 25)

Sửa lỗi

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 40 – Cực đại và toàn đoạn

$f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$. Hàm liên tục trên đoạn; xét các điểm $-3, -2, 2, 5$ với giá trị lần lượt 13, 20, $-12, 69$.

Giá trị lớn nhất 69 tại 5; nhỏ nhất -12 tại 2. Giá trị cực đại 20 tại -2 chỉ là so sánh cục bộ và bị $f(5)$ vượt qua.

Xem đề bài (trang 36)

Nhiệm vụ 41 – Có cận nhưng không đạt

Phép tính đã cho chỉ tính giá trị của biểu thức tại -1 . Vì $-1 \notin D$ nên $f(-1)$ không xác định. Hàm giảm trên $(-1; 2]$. Giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại $x = 2$. Không có giá trị lớn nhất. Với mỗi x trong tập, điểm $y = -1 + \frac{x+1}{2}$ thỏa $-1 < y < x$, nên $f(y) > f(x)$.

Số 5 là cận trên không đạt; $x = -1$ bị loại. Lập luận tạo y mới loại được mọi ứng viên lớn nhất.

Xem đề bài (trang 36)

Nhiệm vụ 42 – Điểm gãy và tọa độ

Cần xét $-4, -2, 1$, cho các giá trị $-1, 1, -2$. Giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = -2$; nhỏ nhất bằng -2 tại $x = 1$. Tại -2 , hàm có giá trị nhưng không có đạo hàm.

Ba đối tượng: $x = -2$; giá trị 1; điểm $(-2; 1)$ trên đồ thị v . Tung độ của đồ thị v' biểu diễn $v'(x)$, không biểu diễn $v(x)$.

Xem đề bài (trang 36)

Nhiệm vụ 43 – Đọc hai thành phần

Các tập giá trị tương ứng là $(1; 4]$ và $[2; 6]$; hợp là $(1; 6]$. Giá trị lớn nhất bằng 6 tại $x = 1$. Không có giá trị nhỏ nhất: số 1 không đạt, trong thành phần đầu có giá trị gần 1 tùy ý; mọi giá trị thuộc thành phần sau cũng lớn hơn một số giá trị thuộc thành phần đầu.

Xem đề bài (trang 36)

Nhiệm vụ 44 – Tổng chi phí và số nguyên

Tổng chi phí là $xG(x) = 3x^2 + 7x + 10$. Lợi nhuận $P(x) = -3x^2 + 43x - 10$. Tập xác định của P là $\{1; 2; \dots; 15\}$. Dùng hàm phụ Q có tập xác định $\mathbb{R}$, $Q(t) = -3t^2 + 43t - 10$: Q tăng trên $(-\infty; \frac{43}{6})$, giảm trên $(\frac{43}{6}; +\infty)$. Tại các số nguyên được phép, P và Q có cùng giá trị. Vì $7 < \frac{43}{6} < 8$, trên các số nguyên chỉ cần so sánh 7 và 8; những số nguyên khác ở xa đỉnh hơn.

$P(7) = 144$; $P(8) = 142$. Vậy 7 sản phẩm cho lợi nhuận lớn nhất 144 nghìn đồng.

Xem đề bài (trang 36)

Nhiệm vụ 45 – Đoạn đóng chưa đủ

Hàm không liên tục tại 0: giới hạn từ bên phải bằng 0, khác $r(0) = 1$. Vì vậy không thể dùng bảo đảm cho hàm liên tục trên đoạn.

Hàm vẫn có giá trị lớn nhất bằng 1 tại $x = 0$ và $x = 1$. Không có giá trị nhỏ nhất: với $x > 0$, $r\left(\frac{x}{2}\right) < r(x)$; còn giá trị $r(0) = 1$ bị $r\left(\frac{1}{2}\right)$ vượt xuống. Các giá trị của hàm tạo thành $(0; 1]$.

Ví dụ vừa bác bỏ việc chỉ kiểm tra đoạn đóng, vừa cho thấy thiếu tính liên tục không đồng nghĩa với không có giá trị lớn nhất.

Xem đề bài (trang 36)

Sau Chuyển giao**Nhiệm vụ 46 – Hàm lượng giác mới**

a liên tục trên đoạn. $a'(x) = 2 \cos 2x - 1$, bằng 0 tại $\frac{\pi}{6}$, dương trước và âm sau điểm đó trong đoạn.

So sánh $a(0) = 0$, $a\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ tại $\frac{\pi}{6}$; nhỏ nhất bằng $-\frac{\pi}{2}$ tại $\frac{\pi}{2}$. Đạt khi xét đủ đầu mút, đúng dấu đạo hàm và kết luận đủ giá trị, điểm đạt.

Xem đề bài (trang 37)

Nhiệm vụ 47 – Hàm lôgarit mới

Hàm có tập xác định $(0; +\infty)$, nên đoạn $[1; e^2]$ nằm trong tập xác định. Ta có

$$h'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

Vì $x^3 > 0$, đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua nghiệm

$$1 - 2 \ln x = 0 \iff x = \sqrt{e}.$$

Các ứng viên là 1, $\sqrt{e}$ và e^2 . Giá trị tương ứng:

$$h(1) = 0, \quad h(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}, \quad h(e^2) = \frac{2}{e^4}.$$

Hàm tăng trên $[1; \sqrt{e}]$ và giảm trên $[\sqrt{e}; e^2]$. Do đó giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2e}$, đạt tại $x = \sqrt{e}$; giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = 1$.

Tiêu chí đạt: nêu đúng tập xác định trước khi đạo hàm; tính đúng đạo hàm và điểm tới hạn; xét đủ hai đầu mút cùng điểm tới hạn; kết luận đúng giá trị và điểm đạt.

Tuyên sau bài: đạt thì quay về Điểm dừng 04 (trang 20) và ghi nhận đã xác nhận nhánh **lôgarit** trong lượt hiện tại. Bài này không kiểm tra tối ưu hàm mũ; không suy rộng kết quả sang nhánh mũ. Sai đạo hàm thì đi Đạo hàm mũ và lôgarit (trang 31), tự làm nhiệm vụ phù hợp trong thẻ nếu chưa gặp trước đó; câu chỉ tính đạo hàm không xác nhận trọn quy trình tối ưu. Nếu đạo hàm đúng nhưng sai quy trình, quay về lập danh sách ứng viên (trang 10). Làm lại bài này nối lại việc học, không là kết quả tự làm một bài mới. Nếu không còn nhiệm vụ cùng mục tiêu chưa gặp trước đó, ghi nhánh còn chưa được xác nhận vào Nhật kí (trang 41) và tiếp tục mục tiêu không phụ thuộc. Kết quả nhánh này không hạ kết quả cốt lõi khi nguyên nhân là thiếu tiên quyết riêng.

Xem đề bài (trang 37)

Sau Kiểm tra

Nhiệm vụ 48 – Cực trị không thay cho giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Ta có

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1).$$

Các điểm tới hạn trong khoảng là $x = -1, 0, 1$. So sánh tại các ứng viên:

$$f(-2) = f(2) = 8, \quad f(-1) = f(1) = -1, \quad f(0) = 0.$$

Vậy giá trị lớn nhất là 8, đạt tại $x = -2$ và $x = 2$; giá trị nhỏ nhất là -1 , đạt tại $x = -1$ và $x = 1$.

Điểm $x = 0$ là điểm cực đại địa phương với giá trị 0, nhưng $0 < 8$. Cực đại địa phương chỉ so sánh trong một lân cận, còn giá trị lớn nhất phải so sánh trên toàn bộ tập đang xét.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: liệt kê đủ năm ứng viên và so sánh giá trị; không gọi $f(0) = 0$ là giá trị lớn nhất; ghi đủ hai điểm đạt giá trị lớn nhất và hai điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

Điểm quay về: đạt thì quay về Điểm dừng 05 (trang 22). Nếu vẫn đồng nhất cực đại với giá trị lớn nhất, xem lại Cực trị và giá trị toàn tập (trang 9). Có thể dùng Nhiệm vụ 54 của Sửa lỗi (trang 39) nếu chưa gặp trước đó; không làm lại chính bài này làm bằng chứng mới. Nếu không còn câu phù hợp, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 37)

Nhiệm vụ 49 – Cùng công thức, khác tập xác định

Trên $(1; 4]$, biểu thức $(x - 1)^2$ tăng từ các giá trị dương tùy ý gần 0 đến 9. Vì 1 không thuộc tập đang xét, không có điểm nào cho giá trị 0.

Đối với f , dù $f(1) = 0$ có nghĩa trên D_f , điểm 1 không thuộc K nên không được dùng khi tìm giá trị trên K . Đối với g , $g(1)$ không xác định vì $1 \notin D_g$.

Do đó cả hai bài toán trên $(1; 4]$ đều có giá trị lớn nhất là 9, đạt tại $x = 4$, và không có giá trị nhỏ nhất. Số 0 chỉ là cận dưới của tập giá trị trên $(1; 4]$.

Phép thay $x = 1$ vào biểu thức đại số cho kết quả 0; phát biểu $f(1) = 0$ đúng; phát biểu $g(1) = 0$ không có nghĩa.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: phân biệt rõ D_f , D_g và K ; không dùng $x = 1$ trong phép tối ưu trên $(1; 4]$; nói đúng rằng có giá trị lớn nhất 9 và không có giá trị nhỏ nhất; phân biệt đúng phép thay biểu thức, giá trị hàm và điểm thuộc tập đang xét.

Điểm quay về: đạt thì quay về Điểm dừng 05 (trang 22). Nếu còn nhầm tập, học Tập xác định (trang 26); nếu coi cận là giá trị đạt, học Cận và sự đạt được (trang 28). Dùng Nhiệm vụ 55 của Sửa lỗi (trang 39) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi rõ mục tiêu chưa được xác nhận vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 37)

Nhiệm vụ 50 – Điểm không có đạo hàm vẫn có thể là ứng viên

Hàm liên tục trên đoạn $[-1; 4]$. Điểm $x = 1$ nằm trong đoạn và là điểm không có đạo hàm, nên vẫn phải được xét cùng hai đầu mút:

$$v(-1) = 2, \quad v(1) = 0, \quad v(4) = 3.$$

Giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại hoành độ $x = 1$, tức điểm $(1; 0)$ trên đồ thị. Giá trị lớn nhất là 3, đạt tại hoành độ $x = 4$, tức điểm $(4; 3)$.

Điều kiện $v'(x) = 0$ không phải là cách duy nhất tạo ứng viên. Điểm thuộc tập đang xét mà tại đó đạo hàm không tồn tại cũng phải được kiểm tra.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: chủ động đưa $x = 1$ vào danh sách ứng viên; không viết “giá trị nhỏ nhất là $x = 1$ ”; phân biệt đúng $x = 1$, giá trị 0 và điểm $(1; 0)$.

Điểm quay về: đạt thì quay về Điểm dừng 05 (trang 22). Nếu vẫn bỏ điểm gãy, học Liên tục (trang 27); nếu nhầm cách đọc đồ thị, học Đồ thị (trang 28). Dừng Nhiệm vụ 56 của Sửa lỗi (trang 39) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi rõ mục tiêu chưa được xác nhận vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 38)

Nhiệm vụ 51 – Hai thành phần và một giá trị đạt

Trên $[-2; 0)$, hàm $x + 4$ có tập giá trị $[2; 4)$. Giá trị 2 đạt tại $x = -2$, còn 4 chỉ là cận trên và không đạt trên thành phần này.

Trên $[1; 3]$, hàm $5 - x$ có tập giá trị $[2; 4]$. Giá trị 4 đạt tại $x = 1$ và giá trị 2 đạt tại $x = 3$.

Gộp hai thành phần, giá trị lớn nhất của f trên K là 4, đạt tại $x = 1$. Giá trị nhỏ nhất là 2, đạt tại $x = -2$ và $x = 3$.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: xét riêng cả hai thành phần; không kết luận “không có giá trị lớn nhất” chỉ vì thành phần thứ nhất hở tại 0; ghi đúng một điểm đạt giá trị lớn nhất và hai điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

Điểm quay về: đạt thì quay về Điểm dừng 05 (trang 22). Nếu sai do điểm hở hoặc giới hạn, học Cận và sự đạt được (trang 28); nếu bỏ thành phần, xem lại Tập nhiều thành phần (trang 12). Dừng Nhiệm vụ 57 của Sửa lỗi (trang 39) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 38)

Nhiệm vụ 52 – Đỉnh nằm giữa hai số nguyên

Tổng chi phí là

$$C(x) = xG(x) = 2x^2 + 4x + 42$$

nghìn đồng. Lợi nhuận là

$$P(x) = -2x^2 + 26x - 42, \quad x \in \{1; 2; \dots; 15\}.$$

Hàm phụ biến thực cùng công thức có đỉnh tại $x = \frac{13}{2} = 6,5$. Cần so sánh hai số nguyên kề đỉnh:

$$P(6) = 42, \quad P(7) = 42.$$

Vậy cả 6 và 7 sản phẩm đều cho lợi nhuận lớn nhất là 42 nghìn đồng. Nếu chỉ làm tròn 6,5 theo một quy ước, học sinh sẽ bỏ mất một phương án tối ưu.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: lập đúng tổng chi phí $xG(x)$; ghi đúng tập số nguyên; so sánh trực tiếp 6 và 7; ghi đủ hai phương án tối ưu và đơn vị.

Điểm quay về: đạt thì quay về Điểm dừng 05 (trang 22). Sai mô hình đi Hàm mục tiêu và đơn vị (trang 30); sai biến nguyên đi Ứng viên nguyên (trang 30). Dừng Nhiệm vụ 58 của Sửa lỗi (trang 39) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu mới, ghi mục tiêu chưa xác nhận vào Nhật ký (trang 41).

Xem đề bài (trang 38)

Nhiệm vụ 53 – Đoạn đóng chưa đủ để dùng định lý tồn tại

Không thể áp dụng định lý vì f không liên tục tại $x = 0$.

Ta có $f(0) = 0$, còn với mọi $x \in (0; 1]$ thì $f(x) = \frac{1}{x} \geq 1$. Do đó giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = 0$.

Hàm không có giá trị lớn nhất. Thật vậy, với mỗi $x \in (0; 1]$, số $\frac{x}{2}$ vẫn thuộc $(0; 1]$ và

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{x} > \frac{1}{x} = f(x).$$

Thiếu giả thiết của định lý chỉ có nghĩa là không được suy ra kết luận từ định lý; phải quay về định nghĩa hoặc phân tích trực tiếp. Trong bài này vẫn có giá trị nhỏ nhất nhưng không có giá trị lớn nhất.

Tiêu chí xác nhận lỗi đã sửa: nêu đúng giả thiết liên tục bị thiếu; không suy ra “không có cả hai giá trị” chỉ từ việc định lý không áp dụng; chứng minh được giá trị nhỏ nhất và việc không có giá trị lớn nhất.

Điểm quay về: đạt thì quay về Điểm dừng 05 (trang 22). Nếu còn dùng định lý sai điều kiện, xem lại Điều kiện tồn tại (trang 10); nếu yếu về giới hạn hoặc tính không bị chặn, học Cận và sự đạt được (trang 28). Chọn Nhiệm vụ 59 của Sửa lỗi (trang 40) nếu chưa gặp trước đó và phù hợp; nếu không còn câu phù hợp chưa gặp trước đó, ghi mục tiêu chưa được xác nhận vào Nhật ký (trang 41).

Xem đề bài (trang 38)

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 54 – Xen kẽ cực trị và giá trị lớn nhất

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1).$$

Các ứng viên là $-2, -1, 0, 1, 2$, với

$$f(-2) = f(2) = 9, \quad f(-1) = f(1) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Giá trị lớn nhất là 9, đạt tại $x = -2, 2$; giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = -1, 1$. Điểm $x = 0$ là điểm cực đại địa phương nhưng không cho giá trị lớn nhất trên đoạn.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi xét đủ năm ứng viên, phân biệt cực đại địa phương với giá trị lớn nhất và ghi đủ điểm đạt. Đạt thì quay về điểm Ôn lại đang thực hiện. Nếu sai, xem lại hai điều kiện của định nghĩa (trang 8), ghi mục tiêu chưa xác nhận và rút ngắn lịch ôn. Nếu các nhiệm vụ phù

hợp trong bảng chọn bài sửa lỗi (trang 32) đều đã gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này”; không tự đặt một bài khác làm bằng chứng.

Xem đề bài (trang 39)

Nhiệm vụ 55 – Khoảng nửa kín và điểm ngoài tập

Trên $(0; 2]$, hàm tăng. Giá trị lớn nhất là 3, đạt tại $x = 2$. Hàm không có giá trị nhỏ nhất vì các giá trị có thể tiến tùy ý gần 1 nhưng không bằng 1. Phép thay $x = 0$ vào biểu thức cho 1, nhưng $0 \notin D$, nên $f(0)$ không xác định.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi phân biệt đúng biểu thức, tập xác định và sự đạt được. Đạt thì quay về điểm Ôn lại. Nếu sai, xem lại Tập xác định (trang 26) hoặc Cận và sự đạt được (trang 28) theo nguồn lỗi. Có thể dùng Nhiệm vụ 29 của Ôn nền (trang 26) nếu chưa gặp trước đó và đúng phần cần xác nhận; nếu đã gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41), không lấy bài cũ làm bằng chứng mới.

Xem đề bài (trang 39)

Nhiệm vụ 56 – Điểm gãy và tọa độ

Điểm gãy là $x = \frac{3}{2}$. So sánh

$$f(0) = 3, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \quad f(2) = 1.$$

Giá trị lớn nhất là 3, đạt tại $x = 0$, tức điểm $(0; 3)$. Giá trị nhỏ nhất là 0, đạt tại $x = \frac{3}{2}$, tức điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. Điểm không có đạo hàm vẫn là một ứng viên cần xét.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi đưa điểm gãy vào danh sách và không nhầm hoành độ với giá trị. Đạt thì quay về điểm Ôn lại; sai thì học Liên tục (trang 27) hoặc Đồ thị (trang 28) theo nguyên nhân. Nếu còn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong thẻ nền hoặc bảng chọn bài sửa lỗi (trang 32), tự làm để xác nhận. Nếu không còn, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 39)

Nhiệm vụ 57 – Tập rời và điểm hở

Trên $(-1; 0]$, tập giá trị là $(-1; 0]$; trên $(2; 4]$, tập giá trị là $(2; 4]$. Do đó giá trị lớn nhất là 4, đạt tại $x = 4$. Hàm không có giá trị nhỏ nhất vì -1 chỉ là cận dưới và không đạt.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi xét cả hai thành phần, không lấy -1 làm giá trị nhỏ nhất và ghi điểm đạt của giá trị lớn nhất. Đạt thì quay về điểm Ôn lại; sai thì học Cận và sự đạt được (trang 28). Chọn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong bảng chọn bài sửa lỗi (trang 32) để xác nhận; nếu không còn, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 39)

Nhiệm vụ 58 – Hai nghiệm nguyên cùng tối ưu

Hàm phụ biến thực có đỉnh tại $x = \frac{7}{2} = 3,5$. So sánh hai số nguyên kề đỉnh:

$$P(3) = 7, \quad P(4) = 7.$$

Vậy 3 và 4 sản phẩm đều cho lợi nhuận lớn nhất là 7 nghìn đồng.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi so sánh trực tiếp hai ứng viên, giữ đủ hai phương án và ghi đơn vị. Đạt thì quay về điểm Ôn lại; sai thì học Ứng viên nguyên (trang 30) và rút ngắn lịch Ôn lại. Chọn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó trong thẻ nền hoặc bảng chọn bài sửa lỗi (trang 32) để xác nhận; nếu không còn, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41).

Xem đề bài (trang 39)

Nhiệm vụ 59 – Quay về định nghĩa khi hàm gián đoạn

Hàm không liên tục tại $x = 2$: giới hạn bên trái bằng 4, khác $f(2) = -1$. Với $0 \leq x < 2$, ta có $f(x) = x^2 \geq 0 > -1 = f(2)$. Giá trị nhỏ nhất là -1 , chỉ đạt tại $x = 2$.

Hàm không có giá trị lớn nhất. Với mọi $x \in [0; 2)$, chọn $y = \frac{x+2}{2}$; khi đó $0 \leq x < y < 2$ và $f(y) = y^2 > x^2 = f(x)$. Tại $x = 2$, giá trị -1 bị $f(0) = 0$ vượt qua. Số 4 là cận trên không đạt; lập luận vừa nêu loại được mọi ứng viên lớn nhất.

Tiêu chí và điểm quay về: đạt khi không áp dụng sai định lí, phân biệt giá trị tại điểm ghép với giới hạn, chứng minh không có giá trị lớn nhất và xác định đúng điểm đạt giá trị nhỏ nhất. Đạt thì quay về điểm Ôn lại. Nếu sai, xem lại Điều kiện tồn tại (trang 10) và bảng chọn bài sửa lỗi (trang 32). Nếu không còn nhiệm vụ phù hợp chưa gặp trước đó, ghi “Chưa có bài mới để xác nhận thêm ở mục tiêu này” vào Nhật kí (trang 41); không tự ghi mục tiêu ấy đã đạt.

Xem đề bài (trang 40)

Nguồn

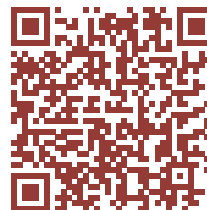
- Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (2018), trang 106–107, nêu yêu cầu nhận biết giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập cho trước và xác định bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.
- *Sách giáo khoa Toán 10, tập hai — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 15, trang 6–7 (trang 7–8 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu định nghĩa hàm số, tập xác định và cách cho hàm số trên một tập được chỉ rõ.
- *Sách giáo khoa Toán 12, tập một — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 2, trang 15–19 (trang 17–21 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu định nghĩa và phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- *Sách giáo viên Toán 12 — Kết nối tri thức với cuộc sống*, bài 2, trang 41–42 (trang 42–43 của tệp PDF), được dùng để đối chiếu mục tiêu và cách tổ chức hoạt động học.
- Học liệu *Đơn điệu và cực trị* được dùng để nối kiến thức về tập xác định, tính đơn điệu, cực trị, bảng biến thiên và đồ thị.

Các tình huống số trong học liệu được biên soạn cho học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”. Gói tập trung vào việc xét đúng tập, kiểm tra sự đạt được và giải thích kết luận; bài toán tối ưu tổng hợp, tiệm cận và biện luận tham số thuộc các gói khác.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học



Bảo trợ ZO Math

Nếu học liệu hữu ích với bạn, bạn có thể bảo trợ ZO Math tiếp tục biên soạn và chia sẻ.



Ngân hàng

Vietcombank

Số tài khoản

0601000137768

Chủ tài khoản

Nguyễn Tấn Nhật

Nội dung chuyển khoản

BAO TRỢ ZO MATH

[Xem thông tin bảo trợ ZO Math](#)