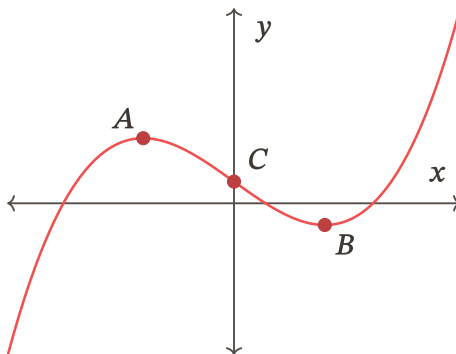


Đơn điệu và cực trị

Lời giải và hướng dẫn chấm

Lời giải và hướng dẫn chấm.



Mở trang Đơn điệu và cực trị

R1-G01

Mục lục

Bắt đầu	2
Cách học	2
Lời giải	5
Bài học	5
Luyện tập	7
Kiểm tra	10
Ôn lại	13
Sửa lỗi	15
Nguồn	20

Bắt đầu

Có thể học

Học liệu “Đơn điệu và cực trị” là gói củng cố kiến thức nền và chẩn đoán lỗi thuộc chương trình **Ôn thi Toán THPT 2027**. Học liệu giúp em đọc đúng công thức, bảng biến thiên và đồ thị; dùng dấu đạo hàm để giải thích kết luận về tính đơn điệu và cực trị. Bài kiểm tra cuối gói nhằm xác định mức độ em làm chủ những nội dung này; đây không phải là đề mô phỏng cấu trúc đề thi tốt nghiệp THPT.

Học xong, em cần làm được gì?

Học xong lượt chính, em cần có bài làm cho thấy mình làm được năm việc:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Dùng đúng điều kiện	Ghi tập xác định, khoảng xét và điều kiện áp dụng định lí trước khi kết luận.
Nói các biểu diễn	Nói công thức, đạo hàm, dấu, chiều biến thiên, bảng và dáng điệu đồ thị; phát hiện biểu diễn không khớp.
Xét và gọi đúng cực trị	Kiểm điều kiện và dấu hai phía; phân biệt điểm cực trị của hàm số, giá trị cực trị và điểm cực trị của đồ thị.
Đọc trong giới hạn dữ kiện	Tách điều biết và chưa biết; không tự thêm đạo hàm, công thức hoặc giá trị chưa được cho.
Đánh giá và sửa lập luận	Đánh giá từng kết luận bằng lí do cụ thể, giữ phần đúng khi sửa; khi cần kiểm tra lại, tự giải một bài khác về đúng lỗi vừa sửa trước khi xem lời giải.

Tiên quyết. Em cần biết tính đạo hàm đa thức, xét dấu biểu thức và đọc giá trị hàm số. Ở các bài về điểm ghép, cần tính được giới hạn một phía đơn giản và dùng thương sai phân một phía để kiểm tra đạo hàm tại điểm đó. Khi thiếu thao tác nào, dùng đúng thẻ **Ôn nên (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Bốn nhiệm vụ Khởi động chỉ khảo sát một số phần nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc mục tiêu của gói.

Cách học

Chuẩn bị giấy để ghi chép. Tự làm trước khi mở lời giải; em có thể chia việc học thành nhiều buổi.

Chọn nơi bắt đầu

- Nếu chưa học hoặc cần học lại chủ đề, vào **Bài học (mở trên trang học liệu)**. Làm đúng các nhiệm vụ Khởi động chưa đủ để kết luận đã đạt cả gói.
- Nếu đã nắm phần học, vào **Luyện tập (mở trên trang học liệu)**. Khi vướng, xem lại đúng phần cần thiết rồi trở về đúng chỗ đang vướng.
- Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, có thể thực hiện **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)**. Không được chia Kiểm tra thành nhiều đợt.

Bản đồ học

Bài học (mở trên trang học liệu) → Luyện tập (mở trên trang học liệu) → Kiểm tra (mở trên trang học liệu) → Ôn lại (mở trên trang học liệu)

Đây là mạch học chính. Em có thể đi tới hoặc quay lại phần cần thiết; phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại được thực hiện theo ngày đã hẹn.

Trong Bài học, Luyện tập, Ôn lại và sau khi kết thúc Kiểm tra, em có thể dùng hỗ trợ theo nhu cầu:

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Xem lại kiến thức đang vận dụng	Đúng đoạn trong Bài học (mở trên trang học liệu)	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bổ sung kiến thức nền	Đúng tài nguyên Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu xác nhận của tài nguyên rồi trở về
Kiểm lại bài làm	Lời giải (trang 5); Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) nếu phát hiện lỗi	Đối chiếu, sửa và xác nhận theo chỉ dẫn của nhiệm vụ hoặc Điểm dừng
Lưu kết quả và việc tiếp theo	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi nơi sẽ tiếp tục và lịch Ôn lại khi có

Trong lúc Kiểm tra, phải tự lực hoàn toàn: không dùng Bài học, Ôn nền, Lời giải hoặc Sửa lỗi để trợ giúp bài đang làm. Nếu cần hỗ trợ, kết thúc lượt kiểm tra và giữ bài làm ban đầu trước.

Khi cần hỗ trợ

Chưa biết cách làm: nếu vướng kiến thức của gói, xem lại đúng lời giải thích hoặc ví dụ trong Bài học; nếu thiếu kiến thức nền, mở đúng tài nguyên Ôn nền. Không cần đọc lại cả gói để tiếp tục một nhiệm vụ.

Muốn kiểm lại bài làm: giữ bài tự làm trước khi mở Lời giải. Đối chiếu điều kiện, lập luận và kết quả. Nếu có lỗi, xác định bước sai và dùng hướng dẫn hoặc nhiệm vụ Sửa lỗi được chỉ định. Khi cần xác nhận sau hỗ trợ, tự làm nhiệm vụ phù hợp còn chưa xem đáp án; quay về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Ở Điểm dừng: dựa vào bài làm và tiêu chí để chọn đi tiếp hay nhận hỗ trợ. Nếu đã đáp ứng tiêu chí, không cần qua mọi nhánh hỗ trợ. Sau Kiểm tra, giữ riêng kết quả ban đầu với kết quả sau sửa.

Đã xem đáp án hoặc không còn nhiệm vụ mới phù hợp: dùng bài đã xem để học, không tính là kết quả tự làm một bài mới. Ghi phần chưa được xác nhận và làm theo chỉ dẫn tại Điểm dừng; không tự đánh dấu đã đạt.

Khi có quyết định hoặc kết thúc buổi học: ghi kết quả, hỗ trợ đã dùng, nơi đang dừng và việc tiếp theo vào Nhật kí. Chỉ điền thông tin đã có; không cần ghi sau mọi thao tác. Nếu vào thẳng phần hỗ trợ, chọn nhiệm vụ hoặc hoạt động em muốn quay về.

Khi nào có thể chuyển sang gói tiếp theo?

Em có thể chuyển sang gói tiếp theo khi bài làm độc lập cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và các lỗi cản trở việc tiếp tục đã được kiểm tra lại sau sửa. Giữ riêng kết quả ban đầu và kết quả sau hỗ trợ; ghi phần còn hạn chế cùng ngày Ôn lại vào Nhật kí. Chọn gói tiếp theo phù hợp với kiến thức em đã có, đồng thời giữ lịch Ôn lại của gói này; không cần chờ hết các lượt ôn mới học tiếp.

Hẹn Ôn lại sau khoảng **2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần**, tính từ ngày đáp ứng các điều kiện trên. Đến ngày hẹn, tự làm nhiệm vụ của lượt Ôn lại trước khi đối chiếu. Một lượt ôn chỉ cho biết kết quả ở những nội dung được kiểm tra trong lượt đó, không có nghĩa em đã làm chủ mọi tình huống của cả chủ đề. Nếu một nội dung vừa phải sửa lại, ghi thêm ngày kiểm lại sớm nội dung ấy.

Lời giải

Chỉ mở lời giải của câu đã tự làm. Đối chiếu điều kiện và lí do trước đáp số; dùng liên kết Xem lời giải của từng câu để đến đúng chỗ. Lời giải và thang chấm do ZO Math biên soạn.

Bài học

Khởi động

Nhiệm vụ 01 — Tập xác định và khoảng áp dụng

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Không áp dụng định lí trên cả $(1; 3)$ vì khoảng này chứa 2, tại đó hàm số không xác định. Cần xét riêng những khoảng nằm trong tập xác định. Lỗi cần phát hiện: “bỏ sót tập xác định hoặc khoảng xét”.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 02 — Đạo hàm và dấu hai phía

$s'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$. Đạo hàm âm khi $x < 1$, bằng 0 khi $x = 1$, dương khi $x > 1$. Nếu tính sai, ôn lại đạo hàm đa thức; nếu xét dấu sai, kiểm tra dấu của $x - 1$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 03 — Đọc hàng và chiều mũi tên

Mũi tên đi lên trên $(-2; 0)$ và đi xuống trên $(0; 2)$. Số 3 thuộc hàng $f(x)$, ở cột $x = 0$; đó là $f(0)$, không phải một hoành độ.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 04 — Phân biệt đồ thị hàm số và đạo hàm

Dữ kiện nói $f'(x) < 0$ trên K , không nói $f(x) < 0$. Từ đó có thể kết luận f nghịch biến trên K . Lỗi cần phát hiện: “kết luận vượt quá dữ kiện”.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ trong Bài học

Chỉ đọc mục tương ứng sau khi đã thử. Đây là lời giải của các câu nhúng trong bài học, chưa phải tập lời giải cho phần luyện tập hoặc cụm kiểm tra cuối gói.

Nhiệm vụ 05 — Hai đầu mút chưa quyết định cả khoảng

Thứ nhất, hàm số chỉ được xét trên khoảng mở $(a; b)$ nên chưa chắc có các giá trị $f(a)$, $f(b)$. Thứ hai, ngay cả khi hai giá trị ấy tồn tại, một phép so sánh hai đầu mút vẫn không kiểm soát mọi cặp điểm trong khoảng. Chẳng hạn $f(x) = x^3 - 3x + 1$ có $f(-2) = -1 < 3 = f(2)$ nhưng lại nghịch biến trên $(-1; 1)$; nó không đồng biến trên $(-2; 2)$. Lỗi: “bỏ sót tập xác định hoặc khoảng xét”, “kết luận vượt quá dữ kiện”.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 06 — Một nghiệm không đổi dấu

Vì h có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $h'(x) > 0$ khi $x \neq -2$ và chỉ bằng 0 tại -2 , nên h đồng biến trên $\mathbb{R}$. Có thể giữ mốc -2 trong bảng dấu để kiểm tra, nhưng không bắt buộc tách kết luận đơn điệu ở mốc ấy.

Điểm có đạo hàm bằng 0 không tự làm hàm số đổi chiều. Lỗi cần sửa ở đây là ngắt khoảng máy móc tại mọi nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0: dấu đã được cho, không phải suy chiều đảo từ đồng biến.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 07 — Kiểm nét vẽ bằng dấu đạo hàm

Không. Ta đã có $p'(x) < 0$ với mọi x thuộc $(-1; 1)$ nên p nghịch biến trên cả khoảng. Một đoạn đi lên bên trong khoảng ấy mâu thuẫn với kết luận này. Hai điểm mốc đúng không bảo đảm toàn bộ đường biểu diễn đúng. Lỗi: “kết luận vượt quá dữ kiện”.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 08 — Cực trị khi chưa biết đạo hàm tại mốc

Có. w liên tục trên khoảng chứa 0, có đạo hàm ở hai phía và đạo hàm đổi từ dương sang âm. Theo định lý, w đạt cực đại tại 0, giá trị cực đại là 5. Không cần biết $w'(0)$ để áp dụng định lý này. Lỗi: “coi không có đạo hàm là không có cực trị”.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 09 — Gọi đúng đối tượng cực trị

Hàm số p có điểm cực tiểu $x = 1$, giá trị cực tiểu $p(1) = -1$; điểm cực tiểu của đồ thị là $B(1; -1)$. Lỗi: “nhầm điểm, giá trị và tọa độ cực trị”.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 10 — Giới hạn suy luận từ đồ thị đạo hàm

Vì f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại 2. Đạo hàm âm trên $(-\infty; 2)$ và dương trên $(2; +\infty)$, do đó f nghịch biến trên khoảng thứ nhất, đồng biến trên khoảng thứ hai và đạt cực tiểu tại 2. Điểm $(2; 0)$ nằm trên đồ thị đạo hàm nên cho $f'(2) = 0$, không cho $f(2) = 0$. Chưa đủ dữ kiện xác định giá trị cực tiểu. Lỗi: “kết luận vượt quá dữ kiện”.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 11 — Xét dấu và giới hạn dữ kiện

Vì g có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, nó liên tục tại cả -1 và 2 . Khi $x \neq 2$, thừa số $(x - 2)^2$ dương nên dấu của $g'(x)$ là dấu của $x + 1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Bảng dấu đạo hàm.

- g nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- Trên $(-1; +\infty)$, đạo hàm dương trừ một điểm $x = 2$ tại đó bằng 0. Vì vậy g đồng biến trên toàn khoảng $(-1; +\infty)$.
- Qua -1 , đạo hàm đổi từ âm sang dương; g đạt cực tiểu tại -1 .
- Qua 2 , đạo hàm dương ở cả hai phía; g không đạt cực trị tại 2 .
- Không có điểm cực đại: ngoài hai mốc trên, hàm số giữ chiều biến thiên trong một khoảng quanh mỗi điểm.
- Chưa xác định được giá trị $g(-1)$. Nếu một hàm g thỏa dữ kiện, thì $g + 1$ cũng có cùng đạo hàm nhưng giá trị tại -1 lớn hơn 1 đơn vị. Đạo hàm đã cho không ấn định giá trị cực tiểu.

Tự kiểm việc sửa lỗi: chỉ coi lượt này đã xử lí được “coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị” nếu em không chọn 2 là điểm cực trị và có lí do bằng dấu hai phía. Nếu chỉ đoán đúng số điểm cực trị, vẫn cần viết lại lập luận. Việc không tự gán $g(-1) = 0$ là bằng chứng bổ sung cho “kết luận vượt quá dữ kiện”.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Luyện tập

Nhiệm vụ 12 – Ghép công thức, bảng và đồ thị

$D = \mathbb{R}$; f là đa thức nên liên tục và có đạo hàm trên tập xác định. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3).$$

Dấu lần lượt dương, âm, dương trên $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$.

Vì vậy f đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên $(1; 3)$. $f(1) = 3$, $f(3) = -1$; các giới hạn ở hai đầu lần lượt là $-\infty$, $+\infty$.

Bảng I và hình A phù hợp. Bảng II sai dấu trên $(1; 3)$; nó còn đặt mũi tên đi lên từ giá trị 3 đến giá trị -1 , trái với thứ tự hai giá trị. Hình B không khớp chiều biến thiên và các tung độ tại mốc.

Hàm số đạt cực đại tại 1, giá trị cực đại 3, điểm cực đại đồ thị $(1; 3)$. Hàm số đạt cực tiểu tại 3, giá trị cực tiểu -1 , điểm cực tiểu đồ thị $(3; -1)$.

Nếu sai: “nhầm điểm, giá trị và tọa độ cực trị” dẫn đến nhiệm vụ 40 của Sửa lỗi sau Luyện tập; “kết luận vượt quá dữ kiện” dẫn đến nhiệm vụ 43 của Sửa lỗi sau Luyện tập. Nếu sai dấu, xét riêng hai thừa số rồi làm lại bước xét dấu ở ý 1, không dùng một hình trông quen để đoán.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 13 – Mốc đạo hàm bằng không

$g'(x) < 0$ khi $x \neq -1$ và chỉ bằng 0 tại -1 . Vì g có đạo hàm trên cả $\mathbb{R}$, chú ý hữu hạn điểm bằng 0 cho phép kết luận g nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hai kết luận nghịch biến trên hai khoảng nhỏ vốn đúng nhưng chưa mạnh nhất. Phần “không thể kết luận trên $\mathbb{R}$ ” sai. Tại -1 , đạo hàm âm ở cả hai phía và hàm liên tục, nên không có cực trị. Phần dùng một điểm có đạo hàm bằng 0 để kết luận cực trị sai.

Câu đã sửa: “ g nghịch biến trên $\mathbb{R}$; tại -1 , đạo hàm bằng 0 nhưng dấu vẫn âm ở hai phía nên g không đạt cực trị.” Nếu còn đếm nghiệm thành cực trị hoặc ngắt khoảng tại mọi nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0, dùng **Điểm có đạo hàm bằng 0 có quyết định cực trị? (mở trên trang học liệu)**, đối chiếu cả tiêu chí nối khoảng. Ở bài này dấu đạo hàm đã cho; ngắt khoảng không phải suy chiều đảo của định lí.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 14 – Đọc đồ thị đạo hàm

Từ hình, h' âm trên $(-\infty; -2)$, bằng 0 tại -2 , dương trên $(-2; 1)$, bằng 0 tại 1, dương trên $(1; +\infty)$.

h nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$, vì trên khoảng thứ hai chỉ có một điểm đạo hàm bằng 0. h có đạo hàm nên liên tục tại các mốc. Đổi dấu âm sang dương tại -2 cho cực tiểu; dấu dương ở hai phía của 1 cho thấy 1 không là điểm cực trị.

Do $h(-2) = 4$, điểm cực tiểu của đồ thị h là $(-2; 4)$. Điểm $(1; 0)$ trên hình cho $h'(1) = 0$, không cho $h(1) = 0$. Đây là lỗi “kết luận vượt quá dữ kiện”; làm nhiệm vụ 43 của Sửa lỗi sau Luyện tập. Nếu chọn thêm cực trị tại 1, ghi “coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị” và làm nhiệm vụ 38 của Sửa lỗi sau Luyện tập.

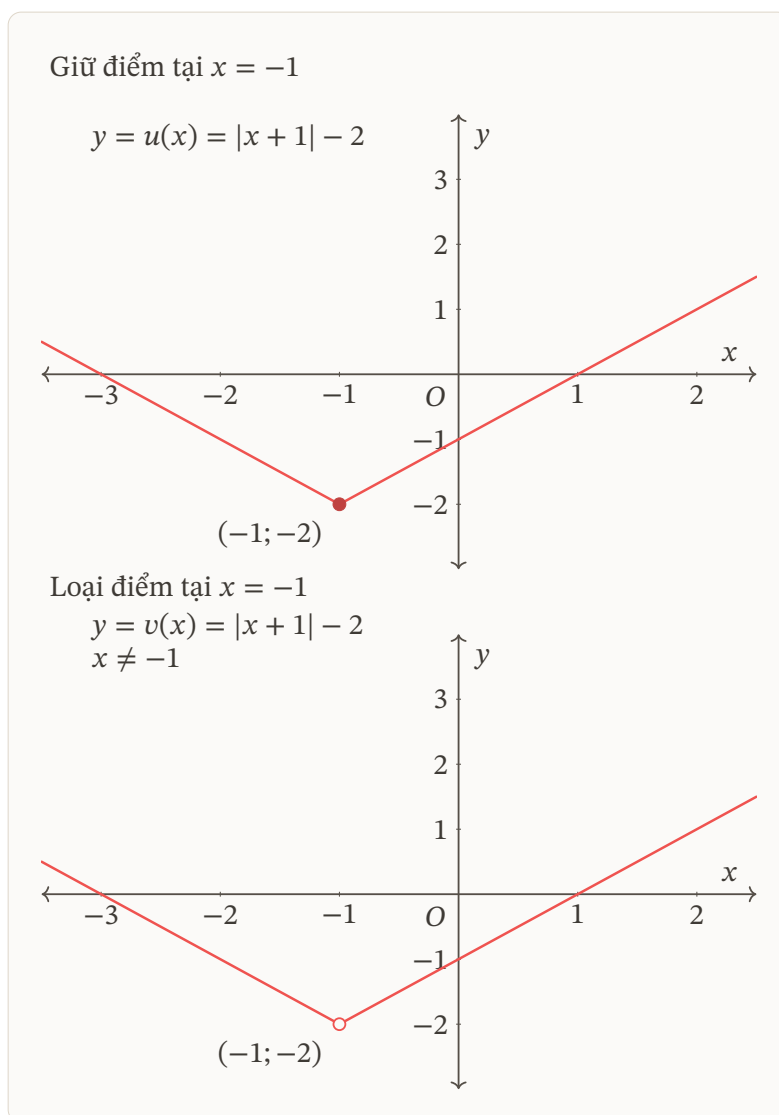
Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 15 – Một góc và một điểm bị bỏ

u liên tục trên $\mathbb{R}$ và $u(-1) = -2$. Bên trái -1 , đạo hàm bằng -1 ; bên phải bằng 1 . Tại -1 , hai giới hạn của thương sai phân bằng -1 và 1 , nên đạo hàm không tồn tại.

Vì u liên tục và đạo hàm đổi từ âm sang dương, u đạt cực tiểu tại -1 , giá trị -2 , điểm đồ thị $(-1; -2)$. Cũng có thể dùng $u(x) > -2$ với mọi $x \neq -1$.

Đối với v , -1 không thuộc tập xác định nên không thể là điểm cực trị. Đồ thị u có điểm kín ở $(-1; -2)$, đồ thị v có điểm hở. Trong bảng của u , hàng hàm số giữ giá trị -2 tại mốc dù hàng đạo hàm ghi không tồn tại. Bảng của v phải thể hiện điểm không thuộc tập xác định qua hàng hàm số; giới hạn bằng -2 không được gọi là $v(-1)$.



Đối chiếu nhiệm vụ 15 của Luyện tập — Điểm kín và điểm hở.

“bỏ sót tập xác định hoặc khoảng xét”: nhiệm vụ 37 của Sửa lỗi sau Luyện tập; **“coi không có đạo hàm là không có cực trị”**: nhiệm vụ 39 của Sửa lỗi sau Luyện tập.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 16 – Đọc bảng không có hàng đạo hàm

r nghịch biến trên $(-3; 0)$ và $(2; 4)$, đồng biến trên $(0; 2)$. Từ bảng và tính liên tục, hàm đạt cực tiểu tại 0 với giá trị -2 , cực đại tại 2 với giá trị 1. Hai điểm cực trị đồ thị là $(0; -2)$ và $(2; 1)$.

Không được điền dấu đạo hàm nghiêm ngặt vì đề chưa cho có đạo hàm. Ngay cả khi thêm có đạo hàm trên $(0; 2)$, chỉ kết luận $r'(x) \geq 0$ trên khoảng ấy. Để thấy dấu bằng có thể xảy ra, trên $[0; 2]$ dùng $r(x) = \frac{3}{2}(x-1)^3 - \frac{1}{2}$: hàm tăng từ -2 đến 1 nhưng đạo hàm tại 1 bằng 0. Nối liên tục với các đoạn thẳng giảm ở hai phần còn lại sẽ cho một hàm phù hợp toàn bảng.

Bảng không xác định duy nhất công thức. Trên $[0; 2]$, đường thẳng $r(x) = -2 + \frac{3}{2}x$ và đường cong vừa nêu đều tăng qua đúng hai giá trị đầu mút nhưng khác nhau bên trong. Giữ nguyên các phần khác sẽ được hai hàm khác nhau có cùng bảng. **“suy dấu đạo hàm nghiêm ngặt từ tính đơn điệu”**: nhiệm vụ 42 của Sửa lỗi sau Luyện tập; **“kết luận vượt quá dữ kiện”**: nhiệm vụ 43 của Sửa lỗi sau Luyện tập.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 17 – Hai nhánh cùng đi lên

Trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, $q'(x) = 1 > 0$, nên q đồng biến trên từng khoảng.

Tuy nhiên, $0 < 2$ nhưng $q(0) = 3 > -1 = q(2)$. Do đó không thỏa yêu cầu đồng biến với mọi cặp điểm trong cả tập D . Một cặp phản ví dụ đủ bác bỏ. Điểm 1 bị loại khỏi tập xác định nên không thể là điểm cực trị.

Không chữa thành quy tắc “hợp các khoảng luôn sai”; vấn đề là so sánh chéo chưa được kiểm tra. **“gộp các khoảng mà chưa kiểm tra”**: nhiệm vụ 41 của Sửa lỗi sau Luyện tập; **“bỏ sót tập xác định hoặc khoảng xét”**: nhiệm vụ 37 của Sửa lỗi sau Luyện tập.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 18 – Đúng/sai với cùng một giả thiết

$t'(x) = 3(x+2)^2$, dương trừ tại -2 , nơi bằng 0. Vì vậy t đồng biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị tại -2 .

Ý	Đánh giá	Căn cứ	Cách sửa nếu sai
a	Sai	Về đồng biến đúng, về đạo hàm dương tại -2 sai	t đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $t'(-2) = 0$
b	Đúng	Về thứ nhất đúng, đủ để mệnh đề “hoặc” đúng	Giữ nguyên
c	Sai	$x = -2$ là phản ví dụ cho “mọi”	Với mọi $x \neq -2$, ta có $t'(x) > 0$; tại -2 đạo hàm bằng 0
d	Sai	Cả hai vế đều sai	t không có cực trị tại -2 hoặc $t'(-2) = 0$

Ở d, không có vế đúng ban đầu cần giữ; câu sửa được chọn có cả hai vế đúng. Một vế sai chỉ đủ bác bỏ mệnh đề “và”; không đủ bác bỏ mệnh đề “hoặc”. **“sai logic hoặc làm mất vế đúng”**: nhiệm vụ

44 của Sửa lỗi sau Luyện tập; **“suy dấu đạo hàm nghiêm ngặt từ tính đơn điệu”**: nhiệm vụ 42 của Sửa lỗi sau Luyện tập.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 19 – Sửa một lời giải rồi làm câu mới

Hàm r tăng trên $(-\infty; -3)$ rồi giảm trên $(-3; +\infty)$; mốc 1 chỉ là một điểm đạo hàm bằng 0 trong khoảng giảm. Qua -3 , đạo hàm đổi từ dương sang âm nên r đạt cực đại. Qua 1, đạo hàm âm ở cả hai phía nên không có cực trị.

Lời giải mắc “coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị” khi đếm điểm có đạo hàm bằng 0 thành số điểm cực trị, và “nhầm điểm, giá trị và tọa độ cực trị” khi gọi các giá trị 5, -2 là điểm cực trị của hàm số.

Kết luận đúng: hàm số có một điểm cực trị, đó là điểm cực đại $x = -3$; giá trị cực đại $r(-3) = 5$; điểm cực đại đồ thị $(-3; 5)$. Tại 1 không có cực trị, dù $r(1) = -2$ là một giá trị được cho.

Sau khi viết lại, làm câu xác nhận riêng sau nhiệm vụ 19 của Luyện tập khi chưa xem đáp án; nếu còn nhầm thuật ngữ, mở lại phần Ba đối tượng cần tách biệt trước khi tự làm câu xác nhận.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Đáp án câu xác nhận sau nhiệm vụ 19 của Luyện tập

Đạo hàm âm trên $(-\infty; -5)$ và $(-5; 4)$, dương trên $(4; +\infty)$. Vì h có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và dấu âm ở hai phía của -5 , hàm nghịch biến trên toàn $(-\infty; 4)$. Hàm đồng biến trên $(4; +\infty)$.

Tại -5 , đạo hàm không đổi dấu nên không có cực trị. Tại 4, dấu đổi từ âm sang dương nên h đạt cực tiểu. Điểm cực tiểu của hàm số là 4; giá trị cực tiểu là -7 ; điểm cực tiểu của đồ thị là $(4; -7)$. Nhận xét “đạo hàm có hai nghiệm $-5, 4$ ” đúng; hai lỗi là đếm mọi nghiệm thành cực trị và dùng hoành độ 4 làm giá trị cực tiểu.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Kiểm tra

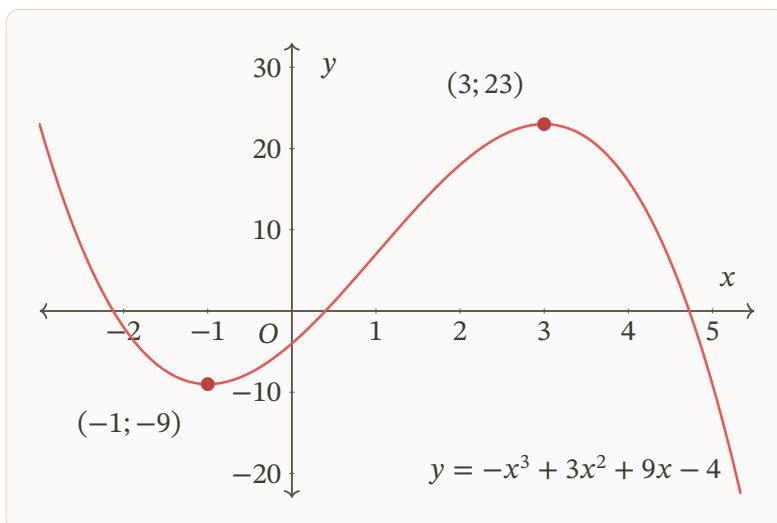
Nhiệm vụ 21 – Dựng chuỗi biểu diễn

Ý	Căn cứ cho điểm	Điểm
a	$D = \mathbb{R}; f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$. Tập xác định: 0,25 điểm; đạo hàm: 0,75 điểm.	1
b	Dấu âm, dương, âm trên ba khoảng tách bởi $-1, 3$; bằng 0 tại hai mốc	1
c	Nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; đồng biến trên $(-1; 3)$	1
d	Bảng và phác hình như dưới, cùng tập xác định và mốc. Bảng: 0,5 điểm; hình: 0,5 điểm.	1
e	Cực tiểu tại -1 , giá trị -9 ; cực đại tại 3, giá trị 23. Mỗi cặp: 0,5 điểm.	1

Vì f là đa thức nên các giả thiết liên tục và có đạo hàm được bảo đảm. Ta có $f(-1) = -9, f(3) = 23$. Hệ số bậc ba âm cho giới hạn ở $-\infty$ là $+\infty$, ở $+\infty$ là $-\infty$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	23	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên.



nhiệm vụ 21 của Kiểm tra — Dáng điệu đồ thị để đối chiếu sau khi làm.

Hình học sinh không cần trùng tỉ lệ hình mẫu, nhưng phải có đúng thứ tự tăng giảm, đúng mốc, tung độ và sự nối liền. Không đòi giao điểm với trục hoành hoặc những tính chất ngoài câu hỏi.

Nếu dùng sai tập hoặc khoảng, chọn **Một mốc bị loại khác (mở trên trang học liệu)**; nếu coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị, chọn **Ba nghiệm của đạo hàm, chỉ hai cực trị (mở trên trang học liệu)**; nếu nhầm điểm, giá trị và tọa độ, chọn **Độc đúng ba đối tượng từ bảng mới (mở trên trang học liệu)**. Chỉ dùng bài phù hợp với lỗi quan sát được và chưa gặp trước đó; lỗi tính đạo hàm hoặc xét dấu thì dùng đúng thẻ Ôn nền.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 22 – Đọc một biểu diễn mới

- Đạo hàm dương trên $(-4; -3)$, âm trên $(-3; -1)$, dương trên $(-1; 2)$ và $(2; 3)$; bằng 0 tại $-3, -1, 2$. Hàm k đồng biến trên $(-4; -3)$ và $(-1; 3)$, nghịch biến trên $(-3; -1)$. Được gộp qua 2 nhờ chú ý hữu hạn điểm bằng 0. **1 điểm:** 0,5 cho các khoảng nhỏ đúng; 0,5 cho kết luận qua 2 và lí do.
- k có đạo hàm trên K nên liên tục tại các mốc. Dương sang âm tại -3 cho cực đại; âm sang dương tại -1 cho cực tiểu. **1 điểm:** mỗi mốc và lí do 0,5.
- 2 không là điểm cực trị vì đạo hàm dương ở cả hai phía, dù bằng 0 tại 2. **1 điểm:** kết luận 0,5; lí do 0,5.
- Chưa biết các giá trị cực trị. Nếu k phù hợp thì $k + C$ có cùng đạo hàm nhưng dịch mọi giá trị thêm C . Không có giá trị nào của k được cho để định vị tung độ. **1 điểm:** kết luận 0,5; lí do 0,5.

Chỉ xét $K = (-4; 3)$; không suy diễn ra ngoài phần tập xác định đề đã cho. Nếu đếm nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 thành cực trị, dùng **Ba nghiệm của đạo hàm, chỉ hai cực trị (mở trên**

trang học liệu); nếu suy giá trị cực trị từ đồ thị đạo hàm, dùng Cùng đạo hàm, khác giá trị cực trị (mở trên trang học liệu). Nếu ngắt khoảng máy móc tại mọi nghiệm, xem lại chú ý hữu hạn điểm bằng 0 ở Mục 2 và dùng Đạo hàm có các lũy thừa chẵn (mở trên trang học liệu) khi bài ấy chưa gặp trước đó, đối chiếu tiêu chí nổi khoảng. Ngắt khoảng từ dấu đã biết không phải lỗi suy chiều đạo của định lí.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 23 – Kiểm từng phát biểu

Mỗi ý 1 điểm: 0,5 cho đánh giá, 0,5 cho căn cứ hợp lệ.

Ý	Đánh giá	Căn cứ
a	Đúng	Hàm giảm rồi tăng qua -1 , liên tục và có $r(-1) = -3$
b	Sai	Không có giả thiết có đạo hàm; ngay cả nếu có thì mũi tên tăng không buộc đạo hàm dương nghiêm ngặt ở mọi điểm
c	Đúng	Về “giá trị cực đại bằng 2” sai vì giá trị đó là 4; về “giá trị cực tiểu bằng -3 ” đúng, đủ cho “hoặc”
d	Sai	Các mũi tên và giá trị mốc chưa xác định mọi giá trị bên trong từng khoảng; có thể có nhiều đường cong cùng thỏa bằng

Một phần ví dụ cụ thể cho b: trên $[-1; 2]$, dùng $r(x) = \frac{28}{27}(x - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}$. Hàm tăng từ -3 đến 4 nhưng $r'(\frac{1}{2}) = 0$. Nối với các đoạn thẳng qua hai cặp điểm $(-4; 2)$, $(-1; -3)$ và $(2; 4)$, $(5; 1)$ sẽ được hàm liên tục phù hợp toàn bằng. Không yêu cầu học sinh tự tạo đúng công thức này để nhận điểm; phản biện bằng điều kiện hoặc một phần ví dụ hợp lệ khác được chấp nhận.

Nhằm đối tượng cực trị thì dùng Đọc đúng ba đối tượng từ bảng mới (mở trên trang học liệu); suy dấu đạo hàm nghiêm ngặt từ tính đơn điệu thì dùng Đạo hàm có các lũy thừa chẵn (mở trên trang học liệu); thêm công thức hoặc dữ kiện thì dùng Cùng đạo hàm, khác giá trị cực trị (mở trên trang học liệu); sai phép nối thì dùng Giữ từng vế đúng trong mệnh đề ghép (mở trên trang học liệu). Chỉ chọn bài đúng lỗi quan sát, không bắt làm cả bốn.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 24 – Tập xác định và điểm không có đạo hàm

- u liên tục tại 3, $u(3) = 2$; các đạo hàm một phía bằng -1 , 1 nên $u'(3)$ không tồn tại. Đạo hàm đổi âm sang dương nên u đạt cực tiểu tại 3, giá trị 2. Có thể dùng trực tiếp $u(x) > 2$ khi $x \neq 3$. **1 điểm:** đạo hàm không tồn tại có lí do 0,5; cực tiểu có lí do 0,5.
- 3 không thuộc tập xác định của v , nên không thể là điểm cực trị. **1 điểm:** kết luận 0,5; căn cứ tập xác định 0,5.
- $w'(x) = 1$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ nên hàm tăng trên từng khoảng. Tuy nhiên $-1 < 1$ mà $w(-1) = 3 > -3 = w(1)$, bác bỏ tính đồng biến theo mọi cặp điểm trong cả tập xác định. **1 điểm:** từng khoảng 0,5; phản ví dụ chéo 0,5.
- Câu sửa: “ $u'(3)$ không tồn tại và u đạt cực tiểu tại 3.” Giữ vế đầu đúng, sửa vế sau sai, dẫn lại lí do ở a. **1 điểm:** câu sửa 0,5; xác định vế đúng/sai và lí do 0,5.

Nếu loại cực trị vì không có đạo hàm, dùng Điểm ghép không có đạo hàm vẫn là cực trị (mở trên trang học liệu); dùng mốc bị loại thì dùng Một mốc bị loại khác (mở trên trang học liệu); gộp tập rồi

thì dùng **Hai nhánh cùng tăng nhưng không tăng trên hợp** (mở trên trang học liệu); xóa vế đúng khi sửa thì dùng **Giữ từng vế đúng trong mệnh đề ghép** (mở trên trang học liệu). Chọn theo lỗi ở từng ý.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 25 – Căn cứ kết luận

Lời giải chưa đủ căn cứ: **0,5 điểm** khi xác định đúng điều này.

Định lí đang dùng cần tính liên tục tại điểm nối 0, ngoài đạo hàm ở hai phía. Đề chưa cho và lời giải chưa chứng minh điều kiện đó: **1 điểm**.

Đề cũng không cho $F(0) = 0$; hoành độ 0 không xác định giá trị hàm số ở đó: **0,5 điểm**.

Ở ý b, với giả thiết bổ sung F liên tục tại 0, hàm số đạt cực đại tại 0; giá trị cực đại là $F(0)$, chưa xác định được bằng số. **1 điểm**: kết luận cực đại đúng 0,5; chỉ rõ giá trị chưa xác định bằng số và phân biệt giả thiết bổ sung với dữ kiện ban đầu 0,5.

Vì hàm đã có đạo hàm trên hai khoảng hai phía, nó liên tục tại mọi điểm của hai khoảng ấy. Bổ sung tính liên tục tại 0 sẽ đủ cho giả thiết liên tục trên cả khoảng. Không chữa thành “ F không có cực trị”, vì thiếu căn cứ cho một định lí không phải bằng chứng phủ định kết luận.

Để thấy dữ kiện ban đầu chưa quyết định được kết luận, xét hai hàm trên $(-1; 1)$. Hàm $F_1(x) = -x^2$ thỏa các dấu đạo hàm đã cho và đạt cực đại tại 0. Hàm $F_2(x) = -x^2$ khi $x \neq 0$, còn $F_2(0) = -1$, có cùng dấu đạo hàm ở hai phía. Nhưng với $0 < |x| < 1$, ta có $F_2(x) > F_2(0)$, nên F_2 không đạt cực đại tại 0. Hai trường hợp cho thấy không thể xác nhận kết luận ban đầu chỉ từ dấu đạo hàm ở hai phía.

Bỏ điều kiện liên tục thì xem lại Mục 4.1 và dùng **Dấu đổi nhưng hàm không liên tục tại điểm ghép** (mở trên trang học liệu); tự gán giá trị hàm số thì dùng **Cùng đạo hàm, khác giá trị cực trị** (mở trên trang học liệu). Nếu chưa tính được giới hạn một phía, dùng **Liên tục và đạo hàm tại điểm ghép** (mở trên trang học liệu); không dùng bài Sửa lỗi sau Luyện tập thay bài xác nhận sau Kiểm tra.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Ôn lại

Nhiệm vụ 26 – Một nghiệm đổi dấu, một nghiệm không đổi dấu

Ta có $f'(x) > 0$ trên $(-\infty; -2)$ và $(-2; 5)$; $f'(x) < 0$ trên $(5; +\infty)$; đạo hàm bằng 0 tại $-2, 5$.

Vì f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đạo hàm dương ở hai phía của -2 , hàm đồng biến trên toàn $(-\infty; 5)$. Tại -2 , đạo hàm không đổi dấu nên không có cực trị. Tại 5, đạo hàm đổi từ dương sang âm nên f đạt cực đại.

Điểm cực đại của hàm số là 5; giá trị cực đại là $f(5) = 7$; điểm cực đại của đồ thị là $(5; 7)$. Chưa đủ dữ kiện xác định $f(-2)$ hoặc công thức của f : hình chỉ mã hóa dấu và nghiệm của đạo hàm, không cho độ lớn của đạo hàm.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 27 – Bảng biến thiên trên hai thành phần

- Đúng. Bảng cho thấy r tăng rồi giảm qua 3; ba đối tượng được gọi đúng.
- Sai. Hai kết luận giảm trên từng thành phần là đúng, nhưng chưa thể gộp tự động. Chẳng hạn $-1 < 5$ nhưng $r(-1) = 0 < 1 = r(5)$, trái với yêu cầu của một kết luận nghịch biến trên toàn

tập hợp được nêu. Câu sửa: “ r nghịch biến trên từng khoảng $[-4; -1]$ và $[3; 5]$; không nghịch biến trên hợp hai khoảng ấy vì so sánh chéo không thỏa.”

- c. Sai. Bảng chỉ cho tính tăng, không cho giả thiết tồn tại đạo hàm. Ngay cả khi biết thêm có đạo hàm trên $(1; 3)$, chỉ có thể kết luận $r'(x) \geq 0$ trên khoảng. Câu sửa: “ r đồng biến trên $[1; 3]$; bảng hiện có không đủ để khẳng định đạo hàm dương tại mọi điểm.”

Phối hợp sau học liệu “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất”. So sánh các giá trị trên cả hai thành phần cho giá trị lớn nhất 6, đạt tại $x = -4$, và giá trị nhỏ nhất 0, đạt tại $x = -1$. Kết quả này không thuộc tiêu chí hoàn tất lượt Ôn lại của học liệu hiện tại.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 28 – Tự dựng chuỗi biểu diễn cho hàm từng đoạn

Tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x),$$

nên F liên tục tại 0.

Với $x < 0$, $F'(x) = -2(x + 1)$. Với $x > 0$, $F'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Đạo hàm trái tại 0 bằng -2 , đạo hàm phải bằng -3 , nên $F'(0)$ không tồn tại.

Các mốc cần xét là -1 , 0 , 1 . Đạo hàm dương trên $(-\infty; -1)$; âm trên $(-1; 0)$ và $(0; 1)$; dương trên $(1; +\infty)$. Vì F liên tục tại 0 và giảm ở cả hai phía, có thể gộp thành khoảng nghịch biến $(-1; 1)$.

Từ hai công thức, giới hạn của F ở $-\infty$ là $-\infty$ và ở $+\infty$ là $+\infty$. Bảng giữ giá trị $F(0) = 0$ dù đạo hàm không tồn tại ở đó; 0 không phải điểm bị loại khỏi tập xác định.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	-	Không xác định	-	0	+	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên của F ; tại 0 hàm có giá trị, nhưng không có đạo hàm.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên $(-1; 1)$. Tại -1 , hàm đổi từ tăng sang giảm nên đạt cực đại; $F(-1) = 1$. Tại 1 , hàm đổi từ giảm sang tăng nên đạt cực tiểu; $F(1) = -2$. Tại 0, hàm tiếp tục giảm nên không có cực trị dù đạo hàm không tồn tại.

- Điểm cực đại của hàm số: $x = -1$; giá trị cực đại: 1; điểm cực đại của đồ thị: $(-1; 1)$.
- Điểm cực tiểu của hàm số: $x = 1$; giá trị cực tiểu: -2 ; điểm cực tiểu của đồ thị: $(1; -2)$.

Phần “ F nghịch biến trên $(-1; 1)$ ” đúng. Phần suy ra $F'(x) < 0$ tại mọi điểm sai vì $F'(0)$ không tồn tại. Câu sửa: “ F nghịch biến trên $(-1; 1)$; đạo hàm âm trên $(-1; 0)$ và $(0; 1)$, còn $F'(0)$ không tồn tại.”

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Sửa lỗi

Sau Luyện tập

Nhiệm vụ 37 – Mốc bị loại khỏi tập xác định

Tập xác định không chứa 2. Đạo hàm $a'(x) = 2(x - 2)$ âm trên $(-\infty; 2)$, dương trên $(2; +\infty)$. Hàm giảm trên khoảng thứ nhất, tăng trên khoảng thứ hai, nhưng không có cực trị tại 2 vì $a(2)$ không xác định. Hình phải có điểm hở tại $(2; 0)$. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi giữ đúng tập xác định và không dùng dấu hai nhánh để tạo một điểm thuộc hàm số.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 38 – Điểm có đạo hàm bằng 0 có quyết định cực trị?

Đạo hàm âm trừ một điểm 1, nơi bằng 0. b có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ theo chú ý hữu hạn điểm bằng 0. Dấu âm ở hai phía và tính liên tục cho thấy không có cực trị tại 1. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi lí do dùng dấu hai phía, không đếm điểm có đạo hàm bằng 0.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 39 – Hai công thức nối tại một điểm

$c(0) = 0$; giới hạn bên trái của x^2 và bên phải của x đều bằng 0, nên c liên tục tại 0. Thương sai phân bên trái bằng h và tiến đến 0, bên phải bằng 1; đạo hàm tại 0 không tồn tại. Bên trái, $c'(x) = 2x < 0$; bên phải, $c'(x) = 1 > 0$. Do đó c đạt cực tiểu tại 0, giá trị 0. Trực tiếp, $c(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi kiểm tra liên tục riêng, không nhầm không có đạo hàm với không có cực trị.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 40 – Đọc đúng ba đối tượng

Cực đại: điểm của hàm số -2 , giá trị 6, điểm đồ thị $(-2; 6)$. Cực tiểu: điểm của hàm số 1, giá trị -4 , điểm đồ thị $(1; -4)$. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi cả ba loại đối tượng được gọi đúng.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 41 – Hợp các khoảng có phải lúc nào cũng sai?

Có. Trên cùng một khoảng, $e(x_2) - e(x_1) = x_2 - x_1 > 0$. Với cặp chéo $x_1 < 0 < x_2$, ta có $e(x_1) = x_1 < 0$ và $e(x_2) = x_2 + 1 > 1$, nên $e(x_1) < e(x_2)$. Hai loại cặp bao quát mọi trường hợp. Đây là kiểm tra mở rộng yêu cầu so sánh ra cả tập D ; D vẫn không phải một khoảng. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi chứng minh mọi cặp chéo, không chỉ thử một cặp.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 42 – Đọc ngược từ đồng biến

Không mâu thuẫn. Ví dụ $f(x) = x^5$ đồng biến trên $(-2; 2)$, có đạo hàm $5x^4$ dương trừ tại 0, nơi bằng 0. Từ đồng biến và có đạo hàm chỉ suy ra $f'(x) \geq 0$ trên khoảng. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi giữ đúng dấu không nghiêm ngặt và có phản ví dụ hợp lệ cho chiều đảo nghiêm ngặt.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 43 – Hai hàm cùng đạo hàm

Cả hai ứng viên phù hợp vì đều có đạo hàm $2x$. Chúng cùng có điểm cực tiểu 0, nhưng giá trị cực tiểu lần lượt là 0 và 7. Vì thế tung độ của đồ thị đạo hàm không phải tung độ của đồ thị hàm số. Em đã sửa được lỗi trong bài này khi tách vị trí cực trị khỏi giá trị cực trị.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 44 – Đổi cách nối hai vế

$s'(x) = 3x^2$, bằng 0 tại 0 và dương ở hai phía; s không đạt cực trị tại 0. A đúng, B sai; “A và B” sai, “A hoặc B” đúng. Câu sửa: “ $s'(0) = 0$ và s không đạt cực trị tại 0.” Em đã sửa được lỗi trong bài này khi xử lí đúng cả hai phép nối và giữ vế A.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Sau Kiểm tra**Nhiệm vụ 45 – Một mốc bị loại khác**

$p'(x) = 2(x + 2)$, âm trên $(-\infty; -2)$ và dương trên $(-2; +\infty)$. Tuy nhiên $-2 \notin D$, nên $p(-2)$ không tồn tại và -2 không thể là điểm cực trị. Câu sửa: “ p nghịch biến trên $(-\infty; -2)$, đồng biến trên $(-2; +\infty)$; không có cực trị tại -2 vì điểm này bị loại khỏi tập xác định.” Đồ thị có điểm hở tại $(-2; 1)$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 46 – Ba nghiệm của đạo hàm, chỉ hai cực trị

Đạo hàm dương trên $(-\infty; -2)$, âm trên $(-2; 1)$ và $(1; 3)$, dương trên $(3; +\infty)$. Vì g có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và 1 chỉ là một điểm đạo hàm bằng 0 trong vùng dấu âm, g nghịch biến trên toàn $(-2; 3)$.

Qua -2 , dấu đổi từ dương sang âm nên g đạt cực đại tại -2 . Qua 1, dấu vẫn âm nên không có cực trị. Qua 3, dấu đổi từ âm sang dương nên g đạt cực tiểu tại 3.

Hai điểm cực trị của đồ thị là $(-2; 5)$ và $(3; -1)$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 47 – Điểm ghép không có đạo hàm vẫn là cực trị

$u(0) = 1$ và hai giới hạn một phía đều bằng 1, nên u liên tục tại 0. Đạo hàm trái bằng -2 , đạo hàm phải bằng 0, nên $u'(0)$ không tồn tại.

Khi $x < 0$ và đủ gần 0, $u(x) = -2x + 1 > 1$. Khi $x > 0$, $u(x) = x^2 + 1 > 1$. Vì vậy $u(x) > u(0)$ với mọi $x \neq 0$ đủ gần 0; hàm đạt cực tiểu tại 0, giá trị cực tiểu 1.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 48 – Đọc đúng ba đối tượng từ bảng mới

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; giá trị cực đại là 6; điểm cực đại của đồ thị là $(-2; 6)$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$; giá trị cực tiểu là -3 ; điểm cực tiểu của đồ thị là $(1; -3)$.

Câu sửa: “Hàm số có điểm cực đại $x = -2$, giá trị cực đại 6; có điểm cực tiểu $x = 1$, giá trị cực tiểu -3 .” Có thể bổ sung hai điểm của đồ thị nếu câu hỏi yêu cầu tọa độ.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 49 – Hai nhánh cùng tăng nhưng không tăng trên hợp

Trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, hàm x^3 đồng biến; cộng một hằng số không đổi chiều biến thiên. Vì vậy q đồng biến trên từng khoảng.

Tuy nhiên $-1 < 1$ mà $q(-1) = 4 > -4 = q(1)$. Cặp chéo này bác bỏ tính đồng biến trên toàn D theo yêu cầu so sánh mọi cặp.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 50 – Đạo hàm có các lũy thừa chẵn

$f'(x) \geq 0$ trên $\mathbb{R}$; bằng 0 chỉ tại 0, 2 và dương ở các điểm còn lại. Theo chú ý về hữu hạn điểm đạo hàm bằng 0, f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Đạo hàm không đổi dấu qua 0 hoặc 2, nên không có cực trị tại hai điểm ấy.

Câu sửa: “Nếu f có đạo hàm và đồng biến trên một khoảng thì $f'(x) \geq 0$ trên khoảng; đạo hàm có thể bằng 0 tại một số điểm.”

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 51 – Cùng đạo hàm, khác giá trị cực trị

$$r_1'(x) = r_2'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Cả hai hàm đạt cực đại tại $x = -1$ và cực tiểu tại $x = 1$.

Với r_1 , giá trị cực đại là 2, giá trị cực tiểu là -2 ; hai điểm đồ thị là $(-1; 2)$, $(1; -2)$. Với r_2 , các giá trị tương ứng là 7, 3; hai điểm đồ thị là $(-1; 7)$, $(1; 3)$.

Đồ thị đạo hàm cho dấu, nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0, chiều biến thiên và vị trí hoành độ của các cực trị khi đủ điều kiện. Nó không tự cho công thức của hàm, các giá trị cực trị hoặc vị trí thẳng đứng của đồ thị hàm số.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 52 – Giữ từng vế đúng trong mệnh đề ghép

$p'(x) = 4x^3$. Do đó A đúng. Vì $p(x) = x^4 \geq 0 = p(0)$, B đúng. C sai vì đạo hàm âm khi $x < 0$.

- “A và C” sai.
- “B hoặc C” đúng vì B đúng.
- “(A và B) và C” sai vì C sai.
- “A hoặc (B và C)” đúng vì A đúng.

Bạn đã nhận đúng rằng C sai, nhưng kết luận về phép “hoặc” sai. Câu sửa: “C sai, B đúng; vì có ít nhất một vế đúng nên ‘B hoặc C’ đúng.”

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 53 – Dấu đổi nhưng hàm không liên tục tại điểm ghép

Với $x < 0$, $h'(x) = 1 > 0$; với $x > 0$, $h'(x) = -1 < 0$. Tuy nhiên

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1 \neq 0 = h(0),$$

nên h không liên tục tại 0. Không được áp dụng định lý đổi dấu đạo hàm để kết luận cực đại.

Với $0 < |x| < 1$, ta có $h(x) = 1 - |x| > 0 = h(0)$. So sánh trực tiếp này trái với kết luận cho rằng giá trị tại 0 lớn hơn các giá trị gần nó. Trong phạm vi đã học, không cần gắn nhãn cực trị cho trường hợp gián đoạn này.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Sau Ôn lại

Nhiệm vụ 54 – Điểm hở và điểm kín cùng hoành độ

Đồ thị có điểm hở $(1; 0)$ của nhánh $(x - 1)^2$ và điểm kín $(1; 2)$ vì $u(1) = 2$. Hàm không liên tục tại 1 vì $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 0 \neq 2 = u(1)$. Khi $0 < |x - 1| < 1$, ta có $u(x) = (x - 1)^2 < 1 < 2 = u(1)$. Phép so sánh này là kết luận bắt buộc; không cần gắn nhãn cực trị theo quy ước ngoài phạm vi đã học.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 55 – Một móc không đổi dấu nằm giữa hai móc đổi dấu

Các móc là $-4, -1, 2$. Dấu của đạo hàm lần lượt là âm, dương, dương, âm. Vì vậy v đạt cực tiểu tại -4 , cực đại tại 2 ; không có cực trị tại -1 . Hàm đồng biến trên $(-4; 2)$ vì đạo hàm dương trừ một điểm cô lập trong khoảng. Không biết giá trị cực trị từ dữ kiện đã cho.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 56 – Cực trị tại điểm ghép

w liên tục tại 0 vì hai giới hạn và $w(0)$ đều bằng 0. Đạo hàm trái bằng -1 , đạo hàm phải bằng 0, nên $w'(0)$ không tồn tại. Với $x \neq 0$ đủ gần 0, $w(x) > 0 = w(0)$; do đó w đạt cực tiểu tại 0.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 57 – Hai hình, ba đối tượng

Điểm cực đại của hàm số là -1 , điểm cực tiểu là 2 ; giá trị cực đại là 3 , giá trị cực tiểu là -2 ; hai điểm cực trị của đồ thị f là $(-1; 3)$ và $(2; -2)$. Các điểm $C(-1; 0)$, $D(2; 0)$ nằm trên đồ thị đạo hàm nên chỉ thể hiện $f'(-1) = f'(2) = 0$.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 58 – Tự chứng minh so sánh chéo

Với hai điểm trong cùng thành phần, kết luận đúng vì hàm bậc ba tăng. Với cặp chéo $x_1 \leq -1 < 1 \leq x_2$, ta có $s(x_1) = x_1^3 \leq -1$ và $s(x_2) = x_2^3 + 1 \geq 2$, nên $s(x_1) < s(x_2)$. Do đó yêu cầu so sánh được thỏa trên toàn D .

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 59 – Đồng biến nhưng đạo hàm có thể bằng không

a đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có $a'(x) = 7x^6 \geq 0$, bằng 0 tại 0, nên câu 2 sai. Đạo hàm dương ở hai phía của 0, hàm tiếp tục tăng qua mốc nên câu 3 sai.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 60 – Biết, chưa biết và sai

a chắc chắn đúng vì đạo hàm đổi dương sang âm tại -2 và đã biết giá trị hàm. b chưa đủ dữ kiện. c chắc chắn sai vì đạo hàm âm ở hai phía của 1. d chắc chắn sai; nhiều đạo hàm khác nhau có thể cùng dấu và nghiệm như mô tả, nên dữ kiện càng không xác định duy nhất công thức hàm.

[Xem đề bài \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 61 – Hai bước đúng, một bước sai

Hai bước đầu đúng. Bước 3 sai vì đạo hàm âm ở cả hai phía của -3 ; hàm tiếp tục giảm qua điểm này. Kết luận: b nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị tại -3 , dù $b'(-3) = 0$.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nhiệm vụ 62 – Tham số tại điểm ghép

Hai giới hạn một phía tại 0 đều bằng 2, nên hàm liên tục tại 0 khi và chỉ khi $a = 2$. Khi ấy, $g_2(x) = 2 - |x| < 2 = g_2(0)$ với mọi $x \neq 0$ đủ gần 0, nên hàm đạt cực đại tại 0, giá trị cực đại 2.

Đối chiếu bổ sung: nếu $a > 2$, các giá trị đủ gần 0 nhỏ hơn a ; nếu $a < 2$, chọn $0 < \delta < 2 - a$ thì $0 < |x| < \delta$ cho $2 - |x| > a$. Hai trường hợp này không liên tục tại 0, vì vậy không áp dụng định lý đổi dấu đã học. Phần so sánh bổ sung không phải cố gắng bắt buộc để hoàn tất lượt Ôn lại cốt lõi.

Xem đề bài (mở trên trang học liệu)

Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (2018), phần lớp 12, trang 105–106: tính đơn điệu, bảng biến thiên, điểm cực trị và giá trị cực trị.
- *Toán 12, tập một — Kết nối tri thức với cuộc sống*, Bài 1, trang in 6–11 và 14 (trang PDF 8–13 và 16 trong bản được cung cấp); Bài 4, trang in 26–27 (trang PDF 28–29).

Các định nghĩa và điều kiện áp dụng được đối chiếu với SGK. Ví dụ, câu hỏi, phản ví dụ, lời giải và thang điểm trong học liệu do ZO Math biên soạn. Bản SGK đối chiếu có ghi “Bản mẫu”; số trang nêu trên gắn với bản này.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học