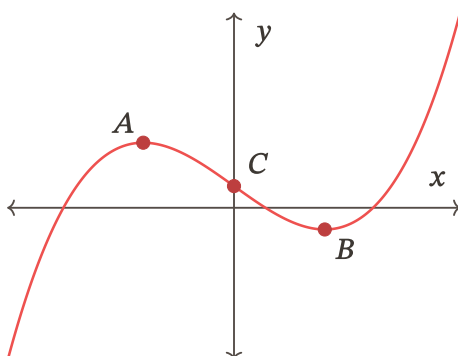


Đơn điệu và cực trị

Bài học

Kiến thức nền, ví dụ và câu hỏi tự kiểm tra.



Mở trang Đơn điệu và cực trị

R1-G01

Mục lục

Bắt đầu	2
Cách học	2
Bài học	5
Khởi động	5
1. Đơn điệu nói điều gì?	6
2. Dấu đạo hàm cho phép kết luận gì?	7
3. Một chuỗi biểu diễn được dựng thế nào?	9
4. Điều gì xảy ra tại một điểm cần xét?	12
5. Cực trị được gọi tên thế nào?	16
6. Có thể đọc ngược đến đâu?	17
7. Làm sao biết mình đã sửa được lỗi?	21
Khép lại bài học	23
Nguồn	24

Bắt đầu

Có thể học

Học liệu “Đơn điệu và cực trị” là gói củng cố kiến thức nền và chẩn đoán lỗi thuộc chương trình **Ôn thi Toán THPT 2027**. Học liệu giúp em đọc đúng công thức, bảng biến thiên và đồ thị; dùng dấu đạo hàm để giải thích kết luận về tính đơn điệu và cực trị. Bài kiểm tra cuối gói nhằm xác định mức độ em làm chủ những nội dung này; đây không phải là đề mô phỏng cấu trúc đề thi tốt nghiệp THPT.

Học xong, em cần làm được gì?

Học xong lượt chính, em cần có bài làm cho thấy mình làm được năm việc:

Mục tiêu	Việc em cần làm được
Dùng đúng điều kiện	Ghi tập xác định, khoảng xét và điều kiện áp dụng định lí trước khi kết luận.
Nói các biểu diễn	Nói công thức, đạo hàm, dấu, chiều biến thiên, bảng và dáng điệu đồ thị; phát hiện biểu diễn không khớp.
Xét và gọi đúng cực trị	Kiểm điều kiện và dấu hai phía; phân biệt điểm cực trị của hàm số, giá trị cực trị và điểm cực trị của đồ thị.
Đọc trong giới hạn dữ kiện	Tách điều biết và chưa biết; không tự thêm đạo hàm, công thức hoặc giá trị chưa được cho.
Đánh giá và sửa lập luận	Đánh giá từng kết luận bằng lí do cụ thể, giữ phần đúng khi sửa; khi cần kiểm tra lại, tự giải một bài khác về đúng lỗi vừa sửa trước khi xem lời giải.

Tiên quyết. Em cần biết tính đạo hàm đa thức, xét dấu biểu thức và đọc giá trị hàm số. Ở các bài về điểm ghép, cần tính được giới hạn một phía đơn giản và dùng thương sai phân một phía để kiểm tra đạo hàm tại điểm đó. Khi thiếu thao tác nào, dùng đúng thẻ **Ôn nên (mở trên trang học liệu)** được dẫn trong bài. Bốn nhiệm vụ Khởi động chỉ khảo sát một số phần nền, không kiểm hết tiên quyết hoặc mục tiêu của gói.

Cách học

Chuẩn bị giấy để ghi chép. Tự làm trước khi mở lời giải; em có thể chia việc học thành nhiều buổi.

Chọn nơi bắt đầu

- Nếu chưa học hoặc cần học lại chủ đề, vào Bài học (trang 5). Làm đúng các nhiệm vụ Khởi động chưa đủ để kết luận đã đạt cả gói.
- Nếu đã nắm phần học, vào **Luyện tập (mở trên trang học liệu)**. Khi vướng, xem lại đúng phần cần thiết rồi trở về đúng chỗ đang vướng.
- Nếu đã chuẩn bị kĩ lưỡng hoặc đủ tự tin, có thể thực hiện **Kiểm tra (mở trên trang học liệu)**. Không được chia Kiểm tra thành nhiều đợt.

Bản đồ học

Bài học (trang 5) → Luyện tập (mở trên trang học liệu) → Kiểm tra (mở trên trang học liệu) → Ôn lại (mở trên trang học liệu)

Đây là mạch học chính. Em có thể đi tới hoặc quay lại phần cần thiết; phần bỏ qua không tự được xem là đã đạt. Ôn lại được thực hiện theo ngày đã hẹn.

Trong Bài học, Luyện tập, Ôn lại và sau khi kết thúc Kiểm tra, em có thể dùng hỗ trợ theo nhu cầu:

Khi cần	Mở phần nào?	Sau đó làm gì?
Xem lại kiến thức đang vận dụng	Đúng đoạn trong Bài học (trang 5)	Trở về nhiệm vụ đang vướng
Bổ sung kiến thức nền	Đúng tài nguyên Ôn nền (mở trên trang học liệu)	Tự làm câu xác nhận của tài nguyên rồi trở về
Kiểm lại bài làm	Lời giải (mở trên trang học liệu); Sửa lỗi (mở trên trang học liệu) nếu phát hiện lỗi	Đối chiếu, sửa và xác nhận theo chỉ dẫn của nhiệm vụ hoặc Điểm dừng
Lưu kết quả và việc tiếp theo	Nhật kí (mở trên trang học liệu)	Ghi nơi sẽ tiếp tục và lịch Ôn lại khi có

Trong lúc Kiểm tra, phải tự lực hoàn toàn: không dùng Bài học, Ôn nền, Lời giải hoặc Sửa lỗi để trợ giúp bài đang làm. Nếu cần hỗ trợ, kết thúc lượt kiểm tra và giữ bài làm ban đầu trước.

Khi cần hỗ trợ

Chưa biết cách làm: nếu vướng kiến thức của gói, xem lại đúng lời giải thích hoặc ví dụ trong Bài học; nếu thiếu kiến thức nền, mở đúng tài nguyên Ôn nền. Không cần đọc lại cả gói để tiếp tục một nhiệm vụ.

Muốn kiểm lại bài làm: giữ bài tự làm trước khi mở Lời giải. Đối chiếu điều kiện, lập luận và kết quả. Nếu có lỗi, xác định bước sai và dùng hướng dẫn hoặc nhiệm vụ Sửa lỗi được chỉ định. Khi cần xác nhận sau hỗ trợ, tự làm nhiệm vụ phù hợp còn chưa xem đáp án; quay về đúng nhiệm vụ hoặc Điểm dừng đang vướng.

Ở Điểm dừng: dựa vào bài làm và tiêu chí để chọn đi tiếp hay nhận hỗ trợ. Nếu đã đáp ứng tiêu chí, không cần qua mọi nhánh hỗ trợ. Sau Kiểm tra, giữ riêng kết quả ban đầu với kết quả sau sửa.

Đã xem đáp án hoặc không còn nhiệm vụ mới phù hợp: dùng bài đã xem để học, không tính là kết quả tự làm một bài mới. Ghi phần chưa được xác nhận và làm theo chỉ dẫn tại Điểm dừng; không tự đánh dấu đã đạt.

Khi có quyết định hoặc kết thúc buổi học: ghi kết quả, hỗ trợ đã dùng, nơi đang dừng và việc tiếp theo vào Nhật kí. Chỉ điền thông tin đã có; không cần ghi sau mọi thao tác. Nếu vào thẳng phần hỗ trợ, chọn nhiệm vụ hoặc hoạt động em muốn quay về.

Khi nào có thể chuyển sang gói tiếp theo?

Em có thể chuyển sang gói tiếp theo khi bài làm độc lập cho thấy em đáp ứng các mục tiêu thiết yếu và các lỗi cản trở việc tiếp tục đã được kiểm tra lại sau sửa. Giữ riêng kết quả ban đầu và kết quả sau hỗ trợ; ghi phần còn hạn chế cùng ngày Ôn lại vào Nhật kí. Chọn gói tiếp theo phù hợp với kiến thức em đã có, đồng thời giữ lịch Ôn lại của gói này; không cần chờ hết các lượt ôn mới học tiếp.

Hẹn Ôn lại sau khoảng **2–3 ngày, 7 ngày và 3–4 tuần**, tính từ ngày đáp ứng các điều kiện trên. Đến ngày hẹn, tự làm nhiệm vụ của lượt Ôn lại trước khi đối chiếu. Một lượt ôn chỉ cho biết kết quả ở những nội dung được kiểm tra trong lượt đó, không có nghĩa em đã làm chủ mọi tình huống của cả chủ đề. Nếu một nội dung vừa phải sửa lại, ghi thêm ngày kiểm lại sớm nội dung ấy.

Bài học

Câu hỏi dẫn đường

Một công thức đạo hàm, một bảng biến thiên và một đồ thị có thể cùng nói về một hàm số. Nhưng chúng không nói cùng một lượng thông tin. Làm thế nào để chuyển từ biểu diễn này sang biểu diễn khác mà không kết luận thêm điều dữ kiện chưa cho phép?

Trong bài này, em sẽ tập trả lời ba câu hỏi trước mỗi kết luận:

1. Ta đang xét hàm số nào, trên tập xác định và khoảng nào?
2. Dữ kiện đang nói về f , về f' , hay chỉ về chiều biến thiên?
3. Điều kiện nào cho phép đi từ dữ kiện đến kết luận?

Bài này không học giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, tiệm cận, tối ưu hoặc toàn bộ quy trình khảo sát hàm số. Chỉ ôn lại kiến thức nền đúng lúc cần dùng.

Khởi động

Tự làm bốn câu hỏi trên giấy trước khi mở lời giải. Sau khi đối chiếu, dùng bảng bên dưới để chọn đúng phần nền còn vướng.

Nhiệm vụ 01 — Tập xác định và khoảng áp dụng

Hàm số $r(x) = \frac{1}{x-2}$ có tập xác định nào? Có thể áp dụng định lý dấu đạo hàm cho r trên cả khoảng $(1; 3)$ không?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 02 — Đạo hàm và dấu hai phía

Tính đạo hàm của $s(x) = x^2 - 2x$ và xác định dấu của đạo hàm ở hai phía của $x = 1$.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 03 — Đọc hàng và chiều mũi tên

Một bảng biến thiên cho biết f đồng biến trên $(-2; 0)$, đạt giá trị 3 tại $x = 0$, rồi nghịch biến trên $(0; 2)$. Khi đi từ trái sang phải, mũi tên ở hai khoảng phải hướng thế nào? Số 3 nằm ở hàng x hay hàng $f(x)$?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Nhiệm vụ 04 — Phân biệt đồ thị hàm số và đạo hàm

Một hình được ghi nhãn $y = f'(x)$. Trên khoảng K , toàn bộ đường biểu diễn nằm dưới trục hoành. Dữ kiện này nói $f(x) < 0$ hay $f'(x) < 0$?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

Sau khi làm xong

Tự làm xong rồi mới đối chiếu lời giải bốn nhiệm vụ Khởi động. Câu nào còn vướng sẽ chỉ ra đúng phần cần ôn; không cần tính điểm.

Chọn phần cần ôn

Bài/điều còn vướng	Phần cần ôn	Trở lại bài
Nhiệm vụ 01 của Khởi động	Mẫu số phải khác 0; một khoảng xét phải nằm trong tập xác định. Xem Ôn nền: Tập xác định (mở trên trang học liệu) .	Quay lại nhiệm vụ 01 của Khởi động rồi tiếp tục.
Nhiệm vụ 02 của Khởi động	Đạo hàm đa thức; dấu của biểu thức có nhân tử. Xem Ôn nền: Đạo hàm (mở trên trang học liệu) , rồi Ôn nền: Xét dấu (mở trên trang học liệu) nếu cần.	Quay lại nhiệm vụ 02 của Khởi động rồi tiếp tục.
Nhiệm vụ 03 của Khởi động	Hàng x ghi vị trí; hàng $f(x)$ ghi giá trị và chiều biến thiên. Xem Ôn nền: Bảng biến thiên (mở trên trang học liệu) .	Quay lại nhiệm vụ 03 của Khởi động rồi tiếp tục.
Nhiệm vụ 04 của Khởi động	Phân biệt nhân $y = f(x)$ với $y = f'(x)$. Xem Ôn nền: Đồ thị hàm và đạo hàm (mở trên trang học liệu) .	Quay lại nhiệm vụ 04 của Khởi động rồi tiếp tục.

Sau khi ôn, làm lại đúng câu còn vướng. Nếu bốn câu đã rõ, đi thẳng vào Mục 1; không cần học lại cả chương đạo hàm.

1. Đơn điệu nói điều gì?

Gợi mở 01 — Ba giá trị có quyết định cả khoảng?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Em tính được $f(0) < f(1) < f(2)$. Chừng đó đã đủ để khẳng định f đồng biến trên $(0; 2)$ chưa?

Chưa. Các giá trị đã tính chỉ cho biết kết quả tại một vài điểm. Muốn kết luận hàm số đồng biến trên $(0; 2)$ theo định nghĩa, phải chứng minh rằng với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng này, nếu $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

1.1. Từ “đi lên” đến định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D . Xét K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nằm trong D .

Đơn điệu: Định nghĩa hàm số đồng biến và nghịch biến

- Hàm số **đồng biến** trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K , khi $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số **nghịch biến** trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K , khi $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Hai điều phải giữ nguyên là “với mọi cặp điểm” và “trên K ”. Khi đọc đồ thị từ trái sang phải, “đi lên” hay “đi xuống” là cách hình dung hai quan hệ ấy, không phải một cách thay thế điều kiện của định nghĩa.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 6.

1.2. Ví dụ 01 – Chứng minh mà chưa dùng đạo hàm

Xét $f(x) = 2x - 1$ trên $\mathbb{R}$. Lấy bất kì $x_1 < x_2$. Ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) > 0.$$

Vì vậy $f(x_1) < f(x_2)$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu thay bằng $g(x) = -2x + 1$ thì

$$g(x_2) - g(x_1) = -2(x_2 - x_1) < 0.$$

Hàm số g nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lập luận này dùng đúng định nghĩa. Đạo hàm sẽ giúp ta xử lý những công thức phức tạp hơn, nhưng không làm thay đổi ý nghĩa của đồng biến, nghịch biến.

Nhiệm vụ 05 — Hai đầu mút chưa quyết định cả khoảng

Một bạn viết: “Hàm số f đồng biến trên $(a; b)$ vì $f(a) < f(b)$.” Chỉ ra hai điều chưa ổn trong lập luận này, kể cả khi hai giá trị ở đầu mút tình cờ tồn tại.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

2. Dấu đạo hàm cho phép kết luận gì?

Gợi mở 02 — Dấu đạo hàm tại điểm và trên khoảng

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu đạo hàm dương ở một điểm thì ta biết điều gì ở điểm đó? Nếu đạo hàm dương trên cả một khoảng thì ta được kết luận thêm điều gì?

Đạo hàm tại một điểm cho biết hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm ấy khi đạo hàm tồn tại. Định lý sau đây mới là căn cứ để đi từ dấu đạo hàm trên một khoảng đến chiều biến thiên trên khoảng đó.

2.1. Định lý và phạm vi áp dụng

Cho f có đạo hàm trên khoảng K .

Đơn điệu: Dấu đạo hàm và chiều biến thiên

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì f nghịch biến trên K .

Khi áp dụng, viết đủ ba ý: hàm số có đạo hàm trên khoảng đang xét; dấu của đạo hàm trên cả khoảng; kết luận chiều biến thiên trên chính khoảng đó.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 7.

Chẳng hạn, với $s(x) = x^2 - 2x$, ta có $D = \mathbb{R}$ và $s'(x) = 2(x - 1)$. Đạo hàm âm trên $(-\infty; 1)$, dương trên $(1; +\infty)$. Do đó s nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Chú ý cách nói: dấu của s' cho biết chiều biến thiên của s . Không viết “đạo hàm đồng biến nên hàm số đồng biến”; sự tăng giảm của đạo hàm là thông tin khác với dấu của đạo hàm.

2.2. Một số hữu hạn điểm đạo hàm bằng 0

Vẫn giả sử f có đạo hàm trên khoảng K . Kết luận trên vẫn đúng nếu đạo hàm giữ dấu nghiêm ngặt tương ứng, chỉ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng. Cụ thể:

Đơn điệu: Đạo hàm bằng 0 tại một số hữu hạn điểm

- $f'(x) \geq 0$ trên K , và chỉ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm, thì f đồng biến trên K .
- $f'(x) \leq 0$ trên K , và chỉ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm, thì f nghịch biến trên K .

Không được rút gọn thành “đạo hàm có hữu hạn nghiệm thì hàm số đơn điệu”: còn phải kiểm tra dấu ở các điểm còn lại. Cũng không được bỏ điều kiện về các điểm bằng 0 rồi khẳng định đồng biến chỉ từ $f'(x) \geq 0$. Ví dụ hàm hằng $f(x) = 5$ có đạo hàm bằng 0 ở mọi điểm nhưng không đồng biến theo định nghĩa nghiêm ngặt ở Mục 1.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 7.

2.3. Ví dụ 02 – Đạo hàm bằng 0 nhưng không đổi chiều

Xét hàm số sau:

$$f(x) = (x - 1)^3 + 2.$$

Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 3(x - 1)^2.$$

Đạo hàm dương với mọi $x \neq 1$, chỉ bằng 0 tại $x = 1$. Bởi chú ý vừa nêu, f đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

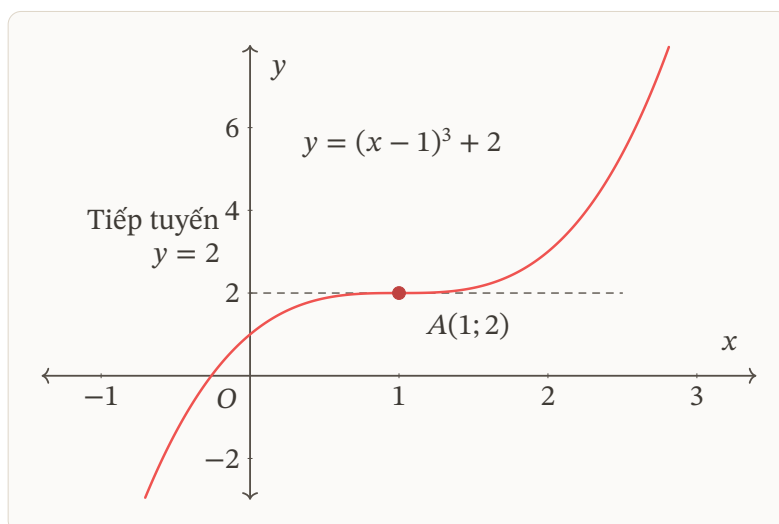
Giữ mốc $x = 1$ trong bảng để thấy điều gì xảy ra ở đó:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên.

Hai mũi tên đều đi lên, gặp nhau ở giá trị $f(1) = 2$. Tiếp tuyến tại điểm $(1; 2)$ nằm ngang vì hệ số góc bằng $f'(1) = 0$, nhưng hàm số không chuyển từ tăng sang giảm hay ngược lại.

Một điểm có tiếp tuyến ngang không làm cho cả một khoảng trở thành đoạn nằm ngang.



Hình 01 — Tiếp tuyến ngang tại (1;2), hàm số vẫn tăng ở hai phía.

2.4. Vì sao không được đảo thành điều kiện nghiêm ngặt?

Không đảo định lý thành dấu nghiêm ngặt.

Ví dụ 02 bác bỏ phát biểu: “Nếu f đồng biến và có đạo hàm trên K thì $f'(x) > 0$ tại mọi điểm của K .”

Hàm số trong ví dụ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nhưng $f'(1) = 0$.

Phát biểu đúng là: nếu f đồng biến và có đạo hàm trên khoảng K , thì $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc K . Với hàm nghịch biến và có đạo hàm, kết luận tương ứng là $f'(x) \leq 0$.

Đọc thêm — Giải thích bằng định nghĩa đạo hàm

Có thể hiểu dấu không nghiêm ngặt này từ định nghĩa đạo hàm. Cố định x_0 trong K . Với $h \neq 0$ đủ nhỏ, tính đồng biến cho

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Khi h tiến đến 0, giới hạn của các số dương có thể bằng 0. Vì vậy không thể buộc giới hạn ấy phải dương nghiêm ngặt.

Nhiệm vụ 06 — Một nghiệm không đổi dấu

Cho h có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $h'(x) = (x + 2)^2$. Hãy kết luận chiều biến thiên trên $\mathbb{R}$ và phản biện câu: “Phải tách thành hai khoảng đơn điệu vì đạo hàm bằng 0 tại -2 .”

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

3. Một chuỗi biểu diễn được dựng thế nào?

Gợi mở 03 — Từ dấu đạo hàm đến hình đồ thị

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Nếu đã có bảng dấu đạo hàm thì còn thiếu gì để viết được giá trị hàm số tại các mốc? Nếu đã có bảng biến thiên thì đã có duy nhất một đồ thị chính xác chưa?

Ta theo dõi một ví dụ xuyên suốt để thấy mỗi bước dùng và bổ sung thông tin nào.

3.1. Ví dụ 03 – Bắt đầu từ công thức

Xét

$$p(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Đây là hàm đa thức nên có tập xác định $\mathbb{R}$, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đạo hàm là

$$p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Các nghiệm của $p'(x) = 0$ là -1 và 1 . Hai mốc này chia trục số thành ba khoảng cần xét dấu.

3.2. Từ đạo hàm đến dấu và chiều biến thiên

Khoảng	Dấu $x + 1$	Dấu $x - 1$	Dấu $p'(x)$	Kết luận về p
$(-\infty; -1)$	Âm	Âm	Dương	Đồng biến
$(-1; 1)$	Dương	Âm	Âm	Nghịch biến
$(1; +\infty)$	Dương	Dương	Dương	Đồng biến

Kết luận này dựa trên dấu trên từng khoảng, không chỉ trên hai đẳng thức $p'(-1) = 0$ và $p'(1) = 0$.

3.3. Từ chiều biến thiên đến bảng biến thiên

Tính các giá trị ở mốc:

$$p(-1) = 3, \quad p(1) = -1.$$

Ngoài ra, từ biểu thức đa thức bậc ba, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

Những giới hạn này được xác định từ công thức, không suy ra chỉ từ dấu của đạo hàm. Nếu chưa vững, có thể kiểm tra bằng cách viết $p(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ với $x \neq 0$.

Bảng biến thiên là:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$p'(x)$		+	0	-	0	+	
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên.

Đọc từng hàng theo đúng chức năng:

- Hàng x ghi các mốc theo thứ tự tăng dần.
- Hàng $p'(x)$ ghi dấu trên khoảng và giá trị đạo hàm tại các mốc đã tính.
- Hàng $p(x)$ ghi giá trị hoặc giới hạn đã biết, cùng mũi tên biểu thị chiều biến thiên.

Số -1 xuất hiện ở cả hai hàng nhưng không luôn chỉ cùng một đối tượng: $x = -1$ là một vị trí, còn $p(1) = -1$ là một giá trị hàm số.

3.4. Từ bảng đến dáng điệu đồ thị

Từ công thức, tính thêm $p(0) = 1$. Vì vậy đồ thị đi qua $C(0; 1)$, là giao điểm với trục tung. Điểm này giúp định vị đồ thị; nó không phải mốc đổi chiều trong bảng biến thiên.

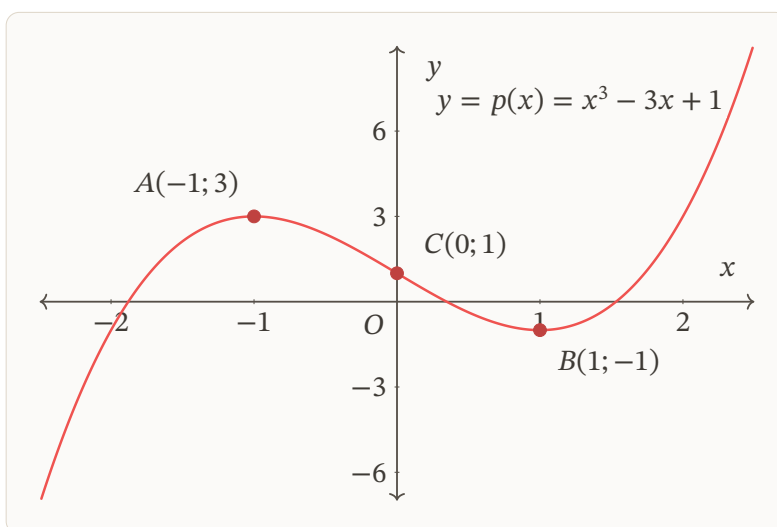
Đồ thị $y = p(x)$ phải phù hợp với các thông tin sau:

- Trên $(-\infty; -1)$, đường biểu diễn đi lên khi đọc từ trái sang phải và tiến đến điểm $A(-1; 3)$.
- Trên $(-1; 1)$, đường biểu diễn đi xuống từ A đến $B(1; -1)$; nó đi qua $C(0; 1)$ do giá trị đã tính từ công thức.
- Trên $(1; +\infty)$, đường biểu diễn đi lên từ B .
- Đồ thị liên tại hai mốc vì p liên tục; các tiếp tuyến tại A và B nằm ngang vì đạo hàm tại đó bằng 0.

Đây là những ràng buộc để phác đúng dáng điệu, chưa phải toàn bộ quy trình khảo sát hàm số. Không tự thêm một giao điểm, tọa độ hoặc tính chất hình học chưa có căn cứ.

Nếu một hình gấn nhãn $y = p(x)$ lại đi lên trên $(-1; 1)$, hình ấy mâu thuẫn với bảng. Nếu một bảng đặt $p(-1) = -1$, bảng ấy mâu thuẫn với công thức. Kiểm tra chéo giúp tìm lỗi ngay tại mắt xích tạo ra nó.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 7–8; Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 4, trang 26–27.



Hình 02 — Đồ thị khớp bảng biến thiên của p .

Nhiệm vụ 07 — Kiểm nét vẽ bằng dấu đạo hàm

Một bản vẽ cho Ví dụ 03 đi qua đúng $A(-1; 3)$ và $B(1; -1)$, nhưng có một đoạn đi lên nằm bên trong $(-1; 1)$. Bản vẽ có thể được chấp nhận vì đã đặt đúng hai điểm mốc không? Nêu đủ kiện quyết định.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

4. Điều gì xảy ra tại một điểm cần xét?

Gợi mở 04 — Mốc đạo hàm bằng không và cực trị

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Cùng có đạo hàm bằng 0, tại sao có điểm làm hàm số đổi chiều còn có điểm không? Một điểm không có đạo hàm có thể vẫn là nơi hàm số đổi chiều không?

Trước hết, hãy hình dung: khi hàm số đạt cực đại tại một điểm, giá trị tại đó lớn hơn các giá trị tại những điểm khác ở đủ gần hai phía. Với cực tiểu, giá trị tại điểm đang xét nhỏ hơn các giá trị ở những điểm khác đủ gần hai phía. Định nghĩa đầy đủ và cách gọi tên sẽ được viết ở Mục 5.

4.1. Điều kiện đủ qua dấu đạo hàm

Giả sử f liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và có đạo hàm trên hai khoảng $(a; x_0)$, $(x_0; b)$.

Cực trị: Điều kiện đủ qua dấu đạo hàm

- Nếu $f'(x) > 0$ trên $(a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; b)$, hàm số đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $f'(x) < 0$ trên $(a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; b)$, hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Đó là định lý điều kiện đủ đang dùng. Định lý không đòi hỏi đạo hàm phải tồn tại tại chính x_0 . Tính liên tục tại x_0 phải được kiểm tra; việc có đạo hàm ở hai phía không tự bảo đảm điều đó.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 10.

Khi các điều kiện trên đã được bảo đảm, có thể tóm tắt hành vi như sau:

Dấu đạo hàm bên trái	Dấu đạo hàm bên phải	Chiều biến thiên quanh x_0	Kết luận tại x_0
Dương trên cả khoảng bên trái	Âm trên cả khoảng bên phải	Tăng rồi giảm	Cực đại
Âm trên cả khoảng bên trái	Dương trên cả khoảng bên phải	Giảm rồi tăng	Cực tiểu
Dương trên cả khoảng bên trái	Dương trên cả khoảng bên phải	Giữ chiều tăng	Không có cực trị
Âm trên cả khoảng bên trái	Âm trên cả khoảng bên phải	Giữ chiều giảm	Không có cực trị

Hai dòng cuối là kết luận trong tình huống có dấu nghiêm ngặt ở mỗi phía và liên tục tại điểm nối. Không dùng câu tắt “không đổi dấu thì không có cực trị” cho một bảng thiếu điều kiện hoặc chưa xác định được dấu trên cả hai khoảng.

4.2. Đối chứng thứ nhất – Đổi dấu và có cực trị

Với $p(x) = x^3 - 3x + 1$ trong Ví dụ 03, tính liên tục đã có vì p là đa thức.

Qua $x = -1$, đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, với giá trị $p(-1) = 3$.

Qua $x = 1$, đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, với giá trị $p(1) = -1$.

Ta không kết luận có cực trị chỉ vì giải được phương trình $p'(x) = 0$. Bước quyết định là kiểm tra dấu hai phía trong những điều kiện phù hợp.

4.3. Đối chứng thứ hai – Bằng 0 nhưng không có cực trị

Trở lại $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ trong Ví dụ 02. Hàm số liên tục tại 1, đạo hàm dương trên cả hai phía của 1 và bằng 0 tại 1.

Với $x < 1$, ta có $f(x) < 2$. Với $x > 1$, ta có $f(x) > 2$. Do đó, dù xét gần 1 đến đâu, vẫn có giá trị nhỏ hơn $f(1)$ ở bên trái và lớn hơn $f(1)$ ở bên phải. Hàm số không đạt cực đại hoặc cực tiểu tại 1.

Nếu $f'(x_0) = 0$, ta vẫn cần xét dấu đạo hàm ở hai phía của x_0 và kiểm tra các điều kiện của định lý trước khi kết luận hàm số có cực trị tại đó.

Nguồn đối chiếu: chú ý về x^3 trong Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 11.

4.4. Đối chứng thứ ba – Không có đạo hàm nhưng có cực trị

Ví dụ 04 — Không có đạo hàm nhưng có cực trị:

$$u(x) = |x|.$$

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, với $u(0) = 0$. Trên hai phía của 0:

- Nếu $x < 0$ thì $u(x) = -x$, nên $u'(x) = -1$.
- Nếu $x > 0$ thì $u(x) = x$, nên $u'(x) = 1$.

Tại 0, thường sai phân là

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Thường này bằng -1 khi $h < 0$ và bằng 1 khi $h > 0$. Hai giới hạn một phía khác nhau nên $u'(0)$ không tồn tại.

Tuy nhiên, đạo hàm đổi từ âm sang dương qua 0, và u liên tục tại 0. Theo định lý, u đạt cực tiểu tại 0. Có thể kiểm tra trực tiếp: với mọi $x \neq 0$, $u(x) = |x| > 0 = u(0)$, nên điều kiện so sánh nghiêm ngặt quanh 0 được thỏa mãn.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 6 và 14.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		−	Không tồn tại	+	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm giá trị tuyệt đối.

Hàng đạo hàm không có giá trị tại 0, nhưng hàng hàm số vẫn có $u(0) = 0$. Không được dùng vạch ngăn tại điểm không thuộc tập xác định ở hàng hàm số để xóa mất điểm này. Đồ thị có một góc tại $(0; 0)$; đó không phải một điểm bị bỏ khỏi đồ thị.

4.5. Tách riêng điểm không thuộc tập xác định

Điểm không thuộc tập xác định.

Xét $v(x) = |x|$ nhưng chỉ trên tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trên mỗi phía của 0, công thức và dấu đạo hàm giống Ví dụ 04. Tuy nhiên, $v(0)$ không tồn tại vì 0 đã bị loại khỏi tập xác định.

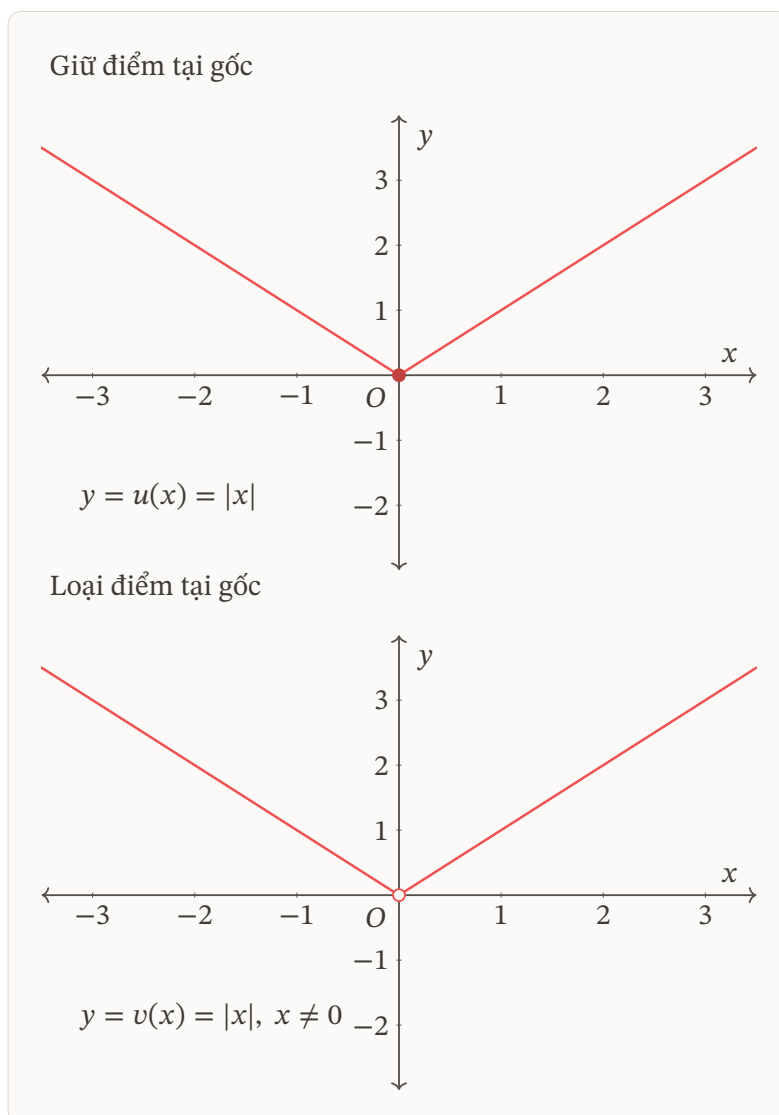
Vì vậy, 0 không thể là điểm cực trị của v . Dấu âm bên trái và dấu dương bên phải không tạo ra một giá trị hàm số tại vị trí không thuộc tập xác định.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$v'(x)$		-		+	
$v(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$		$0 \nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên khi loại 0 khỏi tập xác định.

Hai số 0 ở hai phía của vạch ngăn là giới hạn một phía. Hàm số không có giá trị tại 0.

Khi dựng bảng, phải thể hiện vạch ngăn tại điểm không thuộc tập xác định qua hàng hàm số; nếu ghi giới hạn tại mốc thì đó là giới hạn, không phải $v(0)$. Khi dựng đồ thị, vị trí (0; 0) phải là điểm hở. Đây là sự khác biệt quyết định với Ví dụ 04.



Hình 03 — Cùng đường nét hai phía nhưng khác việc giữ hay bỏ điểm tại gốc.

4.6. Trình tự xét một mốc

Trình tự xét một mốc.

1. Mốc có thuộc tập xác định không? Nếu không, loại khỏi danh sách điểm cực trị.
2. Có một khoảng quanh mốc đáp ứng các điều kiện của định lý không? Kiểm tra riêng tính liên tục tại mốc.
3. Đạo hàm mang dấu gì trên từng khoảng ở hai phía?
4. Hàm số đổi chiều hay giữ chiều? Kết luận theo trường hợp đã kiểm tra.
5. Nếu có cực trị, tính giá trị hàm số và gọi đúng đối tượng.

Nếu thiếu giả thiết, ghi “chưa đủ điều kiện áp dụng định lý”; không chuyển câu đó thành “chắc chắn không có cực trị”.

Nhiệm vụ 08 — Cực trị khi chưa biết đạo hàm tại mốc

Cho w liên tục trên $(-2; 2)$, có đạo hàm trên $(-2; 0)$ và $(0; 2)$; đạo hàm dương trên khoảng bên trái, âm trên khoảng bên phải. Biết $w(0) = 5$ nhưng chưa biết $w'(0)$ có tồn tại hay không. Có kết luận được cực trị tại 0 không? Vì sao?

Xem lời giải (mở trên trang học liệu)

5. Cực trị được gọi tên thế nào?

Gợi mở 05 — Hoành độ, giá trị hay điểm đồ thị?

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Với Ví dụ 03, câu “cực đại là -1 ” có đủ rõ không? Người viết đang nói về hoành độ, giá trị hàm số hay một điểm trên đồ thị?

5.1. Định nghĩa theo so sánh trong một lân cận

Xét f xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$, với x_0 thuộc khoảng đó.

Cực trị: Định nghĩa trong một lân cận

- Hàm số đạt **cực đại tại** x_0 nếu có số $h > 0$ sao cho $(x_0 - h; x_0 + h)$ nằm trong $(a; b)$, và với mọi x trong khoảng nhỏ này, khác x_0 , ta có

$$f(x) < f(x_0).$$

- Hàm số đạt **cực tiểu tại** x_0 nếu tồn tại một khoảng nhỏ như trên mà với mọi $x \neq x_0$ trong khoảng ấy, ta có

$$f(x) > f(x_0).$$

Từ “gần” được làm chính xác bằng việc tồn tại một khoảng nhỏ quanh x_0 . Các bất đẳng thức là nghiêm ngặt. Không cần so sánh với mọi điểm trong toàn bộ tập xác định.

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 9.

Trong bài học này, ta dùng định nghĩa hai phía trên khoảng như trên. Một đầu mút của tập xác định không được tự động phân loại là cực trị bằng quy tắc hai phía. Những quy ước mở rộng khác không thuộc phạm vi bản học liệu này.

5.2. Ba đối tượng cần tách biệt

Đối tượng	Dạng viết	Cực đại của Ví dụ 03	Cực tiểu của Ví dụ 03
Điểm cực trị của hàm số	Hoành độ x_0	$x = -1$	$x = 1$
Giá trị cực trị của hàm số	Giá trị $f(x_0)$	$p(-1) = 3$	$p(1) = -1$
Điểm cực trị của đồ thị	Điểm có hai tọa độ	$A(-1; 3)$	$B(1; -1)$

Cách viết rõ ràng là: “Hàm số p đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại bằng 3; điểm cực đại của đồ thị là $A(-1; 3)$.”

Nguồn đối chiếu: Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 9.

Trong suy luận qua dấu đạo hàm, chủ thể được kết luận đạt cực trị là hàm số p , không phải tự động là hàm đạo hàm p' . Đạo hàm cũng là một hàm số, nhưng nếu muốn bàn về cực trị của nó thì đó là một câu hỏi khác.

5.3. “Cực bộ” có ý nghĩa gì?

Ý nghĩa của “cực bộ”.

Trong Ví dụ 03, p đạt cực đại tại -1 với giá trị 3. Nhưng $p(3) = 19 > 3$. Điều này không mâu thuẫn: cực đại ở -1 chỉ yêu cầu so sánh với các điểm đủ gần -1 .

Tương tự, từ việc p đạt cực tiểu tại 1, không được kết luận mọi giá trị của p trên $\mathbb{R}$ đều lớn hơn hoặc bằng $p(1)$. Chúng ta dừng ở ý nghĩa cực bộ, không chuyển sang bài toán so sánh trên toàn tập xác định.

Nhiệm vụ 09 — Gọi đúng đối tượng cực trị

Sửa câu sau mà vẫn giữ các số đúng: “Đồ thị của $p(x) = x^3 - 3x + 1$ có điểm cực tiểu bằng -1 tại giá trị 1.” Hãy viết riêng điểm cực tiểu của hàm số, giá trị cực tiểu và điểm cực tiểu của đồ thị.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

6. Có thể đọc ngược đến đâu?

Ở Mục 5, em đã tập gọi đúng đối tượng cực trị. Bây giờ cần kiểm tra thêm một việc: từ bảng, hình hoặc đạo hàm đã cho, ta thực sự biết được bao nhiêu về những đối tượng ấy?

Gợi mở 06 — Đọc dấu và chiều biến thiên

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Một mũi tên đi lên trong bảng biến thiên có đủ để viết dấu $+$ ở mọi điểm của hàng đạo hàm không? Một đường cong đang đi xuống có luôn biểu diễn một hàm số âm không?

Hai câu hỏi này buộc ta tách chiều biến thiên khỏi dấu của giá trị, đồng thời đọc đúng đối tượng được biểu diễn.

Trong cả Mục 6, mỗi lần đọc ngược, hãy dừng ở ba câu hỏi:

1. Dữ kiện đang nói về f , f' hay chỉ về chiều biến thiên?
2. Kết luận nào theo trực tiếp từ dữ kiện ấy?
3. Muốn kết luận thêm thì còn thiếu giả thiết hoặc giá trị nào?

6.1. Bảng có hàng đạo hàm và bảng chỉ có chiều biến thiên

Phân biệt dữ kiện về đạo hàm và chiều biến thiên.

Nếu bảng ghi rõ $f'(x) > 0$ trên một khoảng, đó là dữ kiện về đạo hàm. Nếu bảng chỉ có mũi tên đi lên ở hàng $f(x)$, ta biết hàm số đồng biến trên khoảng được biểu diễn; chưa được tự thêm dấu đạo hàm nghiêm ngặt tại mọi điểm.

Nếu có thêm giả thiết hàm số có đạo hàm trên khoảng ấy, ta kết luận được $f'(x) \geq 0$. Ví dụ 02 cho thấy dấu bằng có thể xảy ra ở một điểm trong khi mũi tên vẫn đi lên ở cả hai phía.

Khi một ô không có số, hãy xác định đó là ô không cần ghi, chưa có dữ kiện, hay đạo hàm không tồn tại. Không có quy tắc “ô trống nghĩa là bằng 0”. Trong bản này, trường hợp không tồn tại được ghi bằng chữ để tránh nhầm lẫn.

6.2. Đồ thị của f khác đồ thị của f'

Điều quan sát được trên khoảng K	Nếu nhãn là $y = f(x)$	Nếu nhãn là $y = f'(x)$
Đường biểu diễn nằm trên trục hoành	$f(x) > 0$	$f'(x) > 0$; từ đó kết luận f đồng biến trên K
Đường biểu diễn nằm dưới trục hoành	$f(x) < 0$	$f'(x) < 0$; từ đó kết luận f nghịch biến trên K
Đường biểu diễn đi lên từ trái sang phải	f đồng biến	f' đồng biến; riêng điều này chưa quyết định f đồng biến hay nghịch biến
Đường biểu diễn đi qua một điểm có tung độ 0	Giá trị của f tại đó bằng 0	Đạo hàm của f tại đó bằng 0; cần xem thêm dấu hai phía để xét cực trị của f

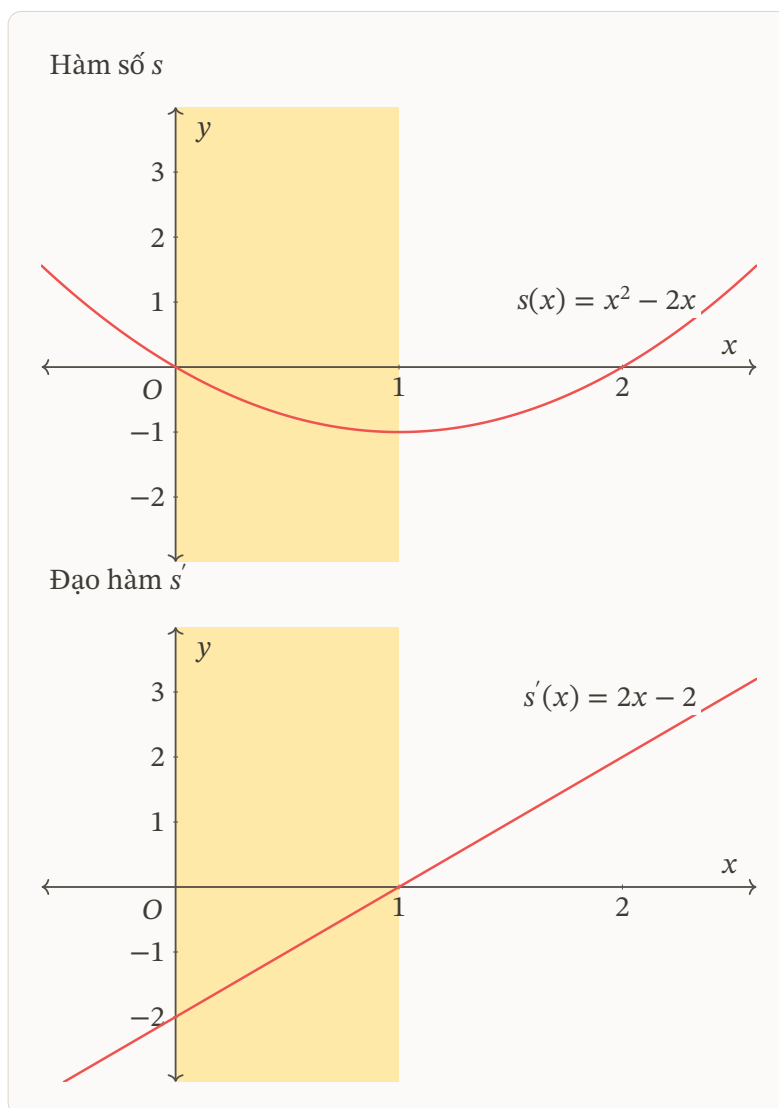
Các kết luận đọc hình được hiểu trên phần tập xác định và với độ chính xác mà đề bài thực sự cung cấp. Hình chỉ có tính minh họa, không ghi tọa độ chính xác thì không đủ để buộc một đáp số chính xác.

Ví dụ 05 — Đạo hàm đang tăng nhưng hàm số đang giảm.

Xét lại $s(x) = x^2 - 2x$. Đồ thị đạo hàm là đường thẳng $y = 2x - 2$, đi lên từ trái sang phải. Tuy nhiên, trên $(0; 1)$ đường thẳng này nằm dưới trục hoành: $s'(x) < 0$. Do đó s nghịch biến trên $(0; 1)$.

Cần đọc vị trí của đồ thị s' so với trục hoành để tìm dấu, không dùng việc đường thẳng ấy đang đi lên để kết luận chiều biến thiên của s .

Nguồn đối chiếu: dạng bài đọc đồ thị đạo hàm trong Sách giáo khoa Toán 12, tập một, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, bài 1, trang 14, bài tập 1.6.



Hình 04 — Hai nhân khác nhau: s đang giảm trong khi s' đang tăng và mang giá trị âm trên $(0;1)$.

6.3. Cùng bảng tóm tắt không có nghĩa cùng công thức

Cùng bảng tóm tắt. Xét hai hàm số trong Ví dụ 06 — Cùng bảng biến thiên, khác công thức:

$$a(x) = x^3, \quad b(x) = 2x^3.$$

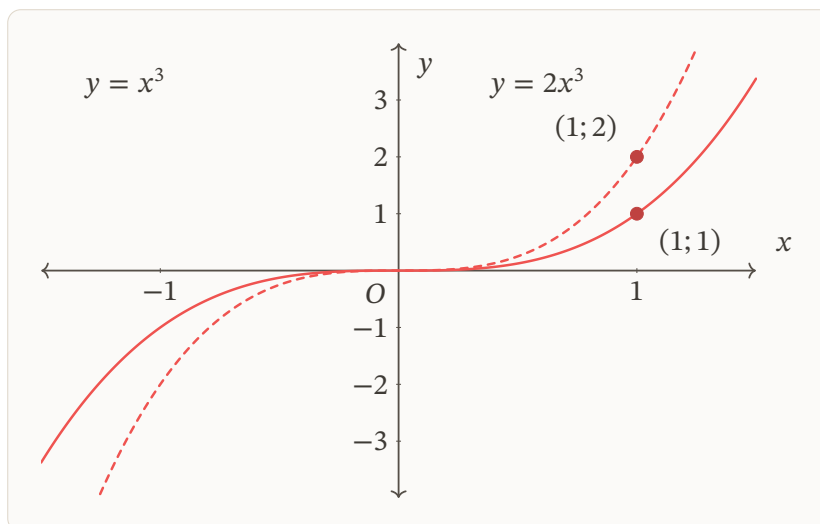
Chúng có cùng tập xác định $\mathbb{R}$, cùng dấu đạo hàm dương ở hai phía của 0, đạo hàm bằng 0 tại 0, cùng giá trị bằng 0 tại đó và cùng các giới hạn ở hai đầu. Vì vậy chúng có cùng bảng biến thiên tóm tắt sau, với F lần lượt là a hoặc b :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	+	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên.

Nhưng $a(1) = 1$ còn $b(1) = 2$, nên hai đồ thị không trùng nhau. Một bảng ghi dấu, mốc và chiều biến thiên không đủ để xác định duy nhất công thức hàm số.

Biết chính xác đạo hàm vẫn chưa đủ biết mọi giá trị của hàm số. Cũng cần phân biệt “biết dấu của đạo hàm” với “biết chính xác hàm đạo hàm”. Hai dữ kiện ấy không tương đương. Chẳng hạn x^3 và $x^3 + 4$ có cùng đạo hàm nhưng khác giá trị tại 0, nên riêng đạo hàm chưa xác định được vị trí của đồ thị theo phương thẳng đứng. Bài này không đặt nhiệm vụ khôi phục công thức từ đạo hàm.



Hình 05 — Hai hàm khác nhau có cùng bảng biến thiên tóm tắt.

6.4. Vì sao không tự gộp các khoảng rời nhau?

Xét Ví dụ 07 — Không tự gộp các khoảng rời nhau với tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

- $q(x) = x + 2$ khi $x < 0$;
- $q(x) = x - 2$ khi $x > 0$.

Trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, đạo hàm đều bằng 1. Do đó q đồng biến trên từng khoảng ấy.

Tuy nhiên, lấy hai điểm thuộc hai khoảng khác nhau:

$$-1 < 1, \quad q(-1) = 1 > -1 = q(1).$$

Vì vậy, nếu mở rộng yêu cầu so sánh mọi cặp điểm ra toàn tập D , tính đồng biến không được thỏa mãn. Định lí trên một khoảng không cho phép tự động nối hai kết luận riêng thành một kết luận trên hợp các khoảng.

Trong bài làm của gói này, cách kết luận chuẩn là: “ q đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.” Không gọi hợp hai khoảng ấy là “một khoảng”.

Đừng thay lỗi “luôn gộp được” bằng một quy tắc sai khác là “hợp các khoảng luôn sai”. Kí hiệu hợp không tự làm mọi phát biểu sai. Ví dụ, $r(x) = x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vẫn thỏa mãn so sánh đồng biến cho mọi cặp điểm thuộc tập xác định. Điểm mấu chốt là phải kiểm tra cả các cặp nằm ở hai thành phần khác nhau; không chỉ xét dấu đạo hàm riêng từng nhánh.

6.5. Bản đồ giới hạn suy luận

Dữ kiện đang có	Có thể kết luận	Chưa đủ căn cứ để kết luận
Công thức f và tập xác định	Giá trị, đạo hàm, dấu và chiều biến thiên sau khi tính, kiểm tra	Một kết luận đơn điệu hoặc cực trị chưa có lập luận
Dấu của f' trên các khoảng	Chiều biến thiên; vị trí cực trị nếu đủ điều kiện	Giá trị cực trị, giao điểm hoặc giới hạn chưa được cho hoặc tính
Bảng biến thiên	Chiều biến thiên, mốc và giá trị được ghi; cực trị nếu đủ kiện cho phép	Công thức duy nhất; mọi giá trị đạo hàm chính xác
Đồ thị f	Đơn điệu, cực trị và tọa độ trong giới hạn thông tin của hình	Có đạo hàm tại một điểm góc; dấu đạo hàm nghiêm ngặt từ riêng nét đi lên
Đồ thị f'	Dấu của đạo hàm; chiều biến thiên của f và xét cực trị khi đủ điều kiện	Coi tung độ của hình là giá trị $f(x)$

Nhiệm vụ 10 — Giới hạn suy luận từ đồ thị đạo hàm

Cho f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành khi $x < 2$, đi qua $(2; 0)$ và nằm trên trục hoành khi $x > 2$.

Hãy cho biết khoảng đơn điệu và vị trí cực trị của f . Có đủ dữ kiện để kết luận giá trị cực trị bằng 0 không?

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

7. Làm sao biết mình đã sửa được lỗi?

Gợi mở 07 — Đọc lời chữa và tự làm

Thử trả lời trước khi đọc tiếp.

Em đã đọc lời giải và thấy hợp lí. Điều đó có chứng minh em sẽ không mắc lại lỗi khi câu hỏi đổi từ công thức sang bảng dấu không?

Chưa. Đọc hiểu lời chữa và tự làm đúng một câu mới là hai bằng chứng khác nhau. Mục này hướng dẫn cách sửa lỗi đầy đủ, không chỉ đổi nhãn “sai” thành “đúng”.

Mục 6 giúp em kiểm tra một kết luận có vượt quá dữ kiện hay không. Mục 7 dùng chính cách kiểm tra ấy để tách từng vế của một phát biểu, giữ phần đúng và sửa đúng chỗ sai.

7.1. Đánh giá từ đúng giả thiết

Đánh giá từng kết luận từ giả thiết đã cho.

Với một cụm phát biểu dùng chung giả thiết, xét từng ý độc lập từ giả thiết đó. Không xem kết luận của ý trước là dữ kiện cho ý sau, nhất là khi ý trước chính là điều đang cần kiểm tra.

Trước khi đánh giá, viết nháp ba dòng: tập xác định và khoảng; dữ kiện đã cho; kết luận đang được hỏi. Sau đó mới chọn định nghĩa, định lí hoặc phản ví dụ phù hợp.

Cấu trúc phát biểu	Khi nào đúng?	Căn cứ đủ để bác bỏ
“A và B”	Cả A và B đều đúng	Chỉ ra ít nhất một vế sai
“A hoặc B”	Ít nhất một vế đúng	Phải chỉ ra cả A và B đều sai

Cấu trúc phát biểu	Khi nào đúng?	Cần cứ đủ để bác bỏ
“Với mọi trường hợp...”	Có lập luận bao quát mọi trường hợp trong giả thiết	Một phản ví dụ thỏa giả thiết nhưng vi phạm kết luận

Ở đây “hoặc” được dùng theo nghĩa ít nhất một vế đúng, không mặc định loại trừ trường hợp cả hai đúng. Một số ví dụ đúng không chứng minh được phát biểu “mọi”; một phản ví dụ phù hợp có thể bác bỏ phát biểu ấy.

7.2. Ví dụ 08 – Giữ phần đúng khi sửa

Cho $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ trên $\mathbb{R}$. Xét phát biểu:

Hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$ và đạt cực đại tại $x = 1$ vì $f'(1) = 0$.

Đánh giá: sai.

Tách các vế: vế đồng biến đúng theo Ví dụ 02; vế đạt cực đại tại 1 sai vì đạo hàm dương ở cả hai phía và hàm số không đổi chiều.

Lỗi quyết định: xem phương trình $f'(1) = 0$ như điều kiện đủ của cực trị. Nếu xóa luôn vế đồng biến khi chữa, ta còn làm mất một phần vốn đúng.

Viết lại hoàn chỉnh: “Hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$ và không đạt cực trị tại $x = 1$; mặc dù $f'(1) = 0$, đạo hàm vẫn dương ở cả hai phía của 1.”

Lời chữa cần có lí do. Chỉ viết “không có cực trị” thì chưa cho thấy em đã thay đổi cách suy luận.

Nhiệm vụ 11 – Xét dấu và giới hạn dữ kiện

Đổi dạng dữ kiện từ công thức hàm số sang công thức đạo hàm. Cho g có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$g'(x) = (x - 2)^2(x + 1).$$

Chưa cho giá trị nào của g . Hãy tự làm bốn việc:

Lượt 1 — Xét dấu và cực trị

- Lập bảng dấu g' với các mốc -1 và 2 .
- Kết luận các khoảng đơn điệu; xem có thể kết luận đồng biến trên toàn khoảng $(-1; +\infty)$ không.
- Xác định mốc nào là điểm cực trị, mốc nào không; nêu lí do.

Lượt 2 — Kiểm tra giới hạn của dữ kiện

- Chưa cho giá trị nào của g . Có tính được giá trị cực trị chỉ từ công thức g' hay không?

Chỉ mở lời giải nhiệm vụ 11 của Nhiệm vụ trong Bài học sau khi đã tự viết. Câu này kiểm tra lại lỗi “điểm có đạo hàm bằng 0 là điểm cực trị”, đồng thời yêu cầu không tự thêm giá trị hàm số từ dữ kiện về đạo hàm.

[Xem lời giải \(mở trên trang học liệu\)](#)

7.3. Một dòng ghi lỗi có ích

Sau khi đối chiếu, có thể phân tích một lỗi như ví dụ dưới đây. Đây là minh họa cách suy nghĩ khi sửa bài; khi cần lưu kết quả và việc tiếp theo, dùng Nhật kí học tập.

Nội dung cần ghi	Minh họa cho lỗi “coi đạo hàm bằng 0 là đủ để có cực trị”
Bước đã sai	Kết luận có hai điểm cực trị vì đạo hàm có hai nghiệm
Điều đã bỏ	Chưa kiểm tra dấu hai phía của từng nghiệm
Cách sửa	Xét dấu; chỉ dùng định lí khi đủ giả thiết và có đổi dấu phù hợp
Câu kiểm tra lại	Nhiệm vụ 11 trong Bài học (trang 22)
Bảng chứng	Ghi kết quả bài tự làm và lí do ở từng mốc, không chép sẵn “đã đúng”
Việc tiếp theo	Nếu còn nhầm tại 2, xem lại Ví dụ 02 để học; bài vừa xem không là bảng chứng mới. Ở Luyện tập, dùng bài sửa được chỉ định chưa gặp trước đó; nếu hết bài phù hợp, ghi mục tiêu chưa xác nhận

Sau khi xem lời chữa, tự giải một bài khác về cùng lỗi trước khi mở đáp án. Nếu giải đúng và giải thích được, ghi phần em đã tự làm được. Để biết mình còn nhớ sau vài ngày, thực hiện lượt Ôn lại theo lịch. Nếu không còn bài phù hợp chưa biết lời giải, ghi rõ phần cần được kiểm tra thêm.

7.4. Nhận diện điều còn vướng

Để nhận diện điều còn vướng, dùng **bảng nút thắt nhận thức trong Sửa lỗi (mở trên trang học liệu)**. Chọn dòng phù hợp với bài làm, thử trả lời câu hỏi rồi xem lại kiến thức được dẫn khi cần.

Hãy nhận diện lỗi trong từng lập luận, rồi chọn việc cần sửa.

Khép lại bài học

Một lời giải tốt không chỉ kết thúc bằng “đồng biến”, “nghịch biến” hoặc “cực trị”. Nó cho thấy đúng hàm số, đúng tập xác định, đúng điều kiện và đúng chiều suy luận.

Trước khi chuyển sang phần luyện tập, hãy tự nói lại năm điều:

1. Đơn điệu được định nghĩa bằng so sánh giá trị trên một tập đang xét; dấu đạo hàm là công cụ để kết luận khi đủ điều kiện.
2. Một điểm đạo hàm bằng 0 chưa quyết định được cực trị; một điểm không có đạo hàm cũng chưa loại trừ cực trị.
3. Bảng dấu, bảng biến thiên và đồ thị phải nhất quán về đối tượng, tập xác định, mốc và chiều biến thiên.
4. Một bảng hoặc hình không cho phép suy ra mọi điều về hàm số; phải phân biệt điều được cho với điều tự thêm.
5. Sửa lỗi cần kết thúc bằng một câu mới tự làm, không chỉ bằng việc đọc lời giải.

Nếu chưa giải thích được một ý, quay lại ví dụ tương ứng trước khi làm nhiệm vụ phối hợp. Các câu hỏi tự kiểm tra trong bài chỉ giúp kiểm tra ngay sau khi học; chúng không phải kết quả tự làm rằng em đã đạt tất cả mục tiêu của bài học.

Nguồn

- Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (2018), phần lớp 12, trang 105–106: tính đơn điệu, bảng biến thiên, điểm cực trị và giá trị cực trị.
- *Toán 12, tập một — Kết nối tri thức với cuộc sống*, Bài 1, trang in 6–11 và 14 (trang PDF 8–13 và 16 trong bản được cung cấp); Bài 4, trang in 26–27 (trang PDF 28–29).

Các định nghĩa và điều kiện áp dụng được đối chiếu với SGK. Ví dụ, câu hỏi, phản ví dụ, lời giải và thang điểm trong học liệu do ZO Math biên soạn. Bản SGK đối chiếu có ghi “Bản mẫu”; số trang nêu trên gắn với bản này.

HỌC TIẾP CÙNG ZO MATH

Chọn điều em muốn học tiếp.

Em có thể bắt đầu với một nội dung đang học, muốn ôn lại hoặc còn vướng khi tự giải bài.



Mở học liệu
của khóa học